LEZIONE 6

ex.2 11/07/17

Stabilire se i seguenti insiemi

$A := [0,1]$ $\quad B = [0,1)$ $\quad C = (-\infty, 1]$

sono compatti e/o connessi quando vengono dotati della topologia indotta da τ_-, τ_e, τ_n.

(Osserviamo che, dato $Y \subseteq X$ e data τ_Y topologia su Y. Sia τ_X ~~.....~~ una topologia su X t.c. τ_Y risulti essere topologia di sottospazio rispetto a τ_X.

Y é compatto rispetto a τ_Y $\Leftrightarrow$ Y é compatto come ~~sottospazio~~ insieme di X rispetto a τ_X.

$\Rightarrow$) Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di Y ~~...~~ con $U_\alpha \in \tau_X$ $\forall \alpha$

Poiché Y é compatto in τ_Y ~~...~~ e $U_\alpha \cap Y \in \tau_Y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ se chiamiamo $U'_\alpha := U_\alpha \cap Y$ abbiamo che $\{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é ricoprimento di Y e per compattezza di Y rispetto a τ_Y,

$\exists$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. ~~...~~ $\bigcup_{i=1}^{n} U'_{\alpha_i} \overset{=}{\cancel{\supseteq}} Y$ $\Rightarrow$ ~~...~~ Y é compatto in ~~...~~ (X, τ_X).

$\Downarrow$

$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supseteq Y$

$(\Leftarrow)$ Sia $\{U'_\alpha\} \subseteq \tau_Y$ una famiglia di aperti di Y t.c. $\bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha = Y$.

Per definizione di τ_Y, $\exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau_X$ t.c. $U_\alpha \cap Y = U'_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.

Poiché Y è compatto in (X, τ_X) allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c.

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \quad \left(\text{poiché } \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \supseteq Y\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} U'_{\alpha_i} \Rightarrow Y \text{ è compatto in } (Y, \tau_Y).$$

Ricordando che $\tau_- \subseteq \tau_e \subseteq \tau_s$, otteniamo subito che

A, B e C non sono compatti in τ_e $\Rightarrow$ non compatti in τ_s.
per Heine-Borel

A, B e C sono connessi in τ_e $\Rightarrow$ sono connessi in τ_-.

$\tau_s)$: $\quad (0,1] = \underbrace{(0,\tfrac{1}{2})}_{\in (A,\tau_s)} \cup \underbrace{[\tfrac{1}{2},1]}_{\in (A,\tau_s)}$ e $(0,\tfrac{1}{2}) \cap [\tfrac{1}{2},1] = \emptyset$

poiché $(0,\tfrac{1}{2}) = (0,1] \cap [-1,\tfrac{1}{2})$

$[\tfrac{1}{2},1] = [\tfrac{1}{2},2) \cap (0,1]$

$\Rightarrow (0,1]$ non è connesso.

lo stesso dicasi per B e C (esercizio).

C.) B non è compatto.

Se scegliamo $U_n := [0, 1-\frac{1}{n})$ $n \geq 1$ otteniamo che

$B = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ però non esiste sottoricoprimento finito.

Infatti: $\forall \{n_k\}_{k=1}^{K} \subsetneq \mathbb{N}$, consideriamo la famiglia

$\{U_{n_k}\}_{k=1}^{K}$. Osserviamo che, se definiamo $\hat{n} := \max\{n_k\}$, $k=1,\dots,K$

~~otteniamo che~~ e definiamo $U := \bigcup_{k=1}^{K} U_{n_k}$, otteniamo che

$U = U_{n_K}$ poiché $U_{n_k} \subseteq U_{n_{k+1}}$ $\forall k$.

$\Rightarrow U = [0, 1-\frac{1}{\hat{n}}) \subsetneq [0,1)$.

A e C esercizio.

Come calcolare il $\pi_1(X, x_0)$?

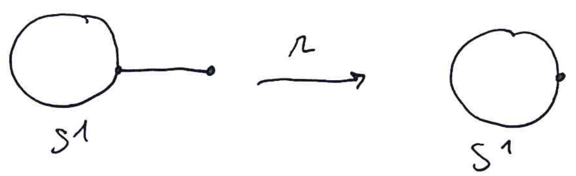
1) Se $X \underset{\text{omeom.}}{\cong} Y \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

2) Se $X \underset{\text{omotop.}}{\simeq} Y \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

in particolare se $\exists\, r: X \longrightarrow Y \subseteq X$ retrazione di deformazione

(cioè r continua, $r|_Y = id$ e $i \circ r \simeq id_X$) $\Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

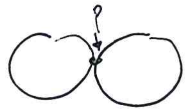
esempio:



3) S.+V. Se $X = U_1 \cup U_2$ aperti, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e t.c.

$\pi_1(U_1 \cap U_2) = \{0\} \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$

esempio.


$= X \qquad X = S_1 \cup S_1$

$S_1 \vee S_1 \qquad\qquad S_1 \cap S_1 = \{p\}$

$$\Rightarrow \pi_1(S_1 \vee S_1) \simeq \pi_1(S_1) * \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

| es. 4 25/07/17 |

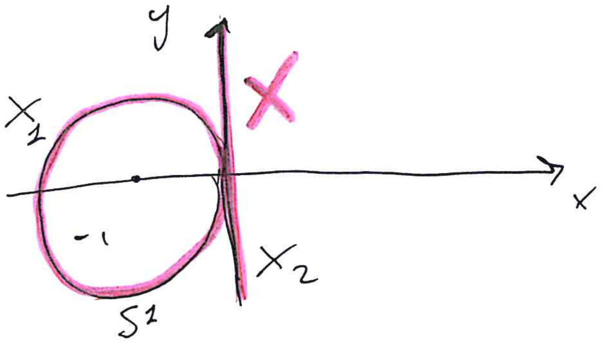
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 2x^2 + xy^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

a) Fare un disegno.

$$x^3 + 2x^2 + xy^2 = x(x^2 + 2x + y^2) = x((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \{x = 0\} \text{ oppure } \{(x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

eq. dell'asse delle y — eq. di circonf. unitaria centrata in $(-1,0)$.



$X_1 = \{(x+1)^2 + y^2 = 1\}$

$X_2 = \{x = 0\}$

b) É connesso per archi? É compatto? e' T_2?

É connesso per archi: infatti $X = X_1 \cup X_2$,

X_1 é connesso per archi poiché circonferenza

X_2 é " " " retta ; $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

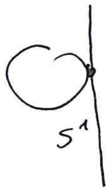
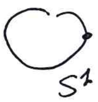
$\Rightarrow X$ é connesso p.a.

Non é compatto poiché non é limitato.

É T_2 poiché $X \subseteq \mathbb{R}^2$ e, $\mathbb{R}^2$ é T_2.

(c) Calcolare il gruppo fondamentale.

$\pi_1(X)$ poiché $X_2 = \{x=0\}$ é contraibile ad un p.to,

allora $X =$  $\underset{\text{omotop.}}{\simeq}$  $\Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

(d) Stabilire se il sottospazio $X_2 := \{x=0\} \subseteq X$ é un retratto di deformazione di X.

No poiché se così fosse $\underset{\underset{\mathbb{Z}}{\wr|}}{\pi_1(X)} \simeq \pi_1(X_2) \cong \{e\}$, assurdo.

---

ex. 1 11/07/17

(a) Il quoziente di un connesso é connesso?

$\pi : X \longrightarrow X/\sim$ $\qquad X/\sim \, = \pi(X) \Rightarrow$ connesso poiché ~~[illegible]~~ immagine di una mappa continua.

(b) Il quoziente di uno spazio T_2 é uno spazio T_2?

$X = (\mathbb{R}, \tau_X)$ $\qquad E := \{1/n : n \geq 1\}$

$\tau_X = \tau_e \cup \{(a,b) \cap E\}$

Consideriamo X/E. $\left(x \sim y \iff \begin{matrix} x \in E, y \in E \\ x = y \end{matrix} \right)$

.) mostrare che X/E non é T_1 (Hint: mostrare che $\{0\} \in X/E$ non é separabile da $[1]$)

.) Sia ora $\tau_X = \tau_n \cup \{(a,b) \cap E\}$

Mostrare che $X/_E$ é T_1 ma non é T_2.

(c) Il quoziente di uno spazio contraibile è contraibile.

FALSO. Esempio $[0,1]/_{\{0,1\}} \approx S^1$

$[0,1]$ è contraibile ad un punto mentre S^1 no.

(d) VERA. Hint: sfruttare la compattezza.

| Teorema Fondamentale dell'algebra. |

Sia $p(z)$ un polinomio di grado $n>0$ in $\mathbb{C}$. Allora ammette uno zero.

dim.

Supponiamo per assurdo che $p(z) \neq 0 \quad \forall z$.

e sia $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$

(senza ledere la generalità della dimostrazione).

Definiamo $G(r,t) := \dfrac{p(re^{2\pi i t})}{|p(re^{2\pi i t})|} \cdot \dfrac{|p(r)|}{p(r)}$ per $r \in [0,1]$, $t \in [0,1]$

$$F(x,y) = \begin{cases} G\left(\frac{x}{1-x}, y\right) & \text{se } x \in [0,1) \\ e^{2\pi i n y} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lim_{x \to 1^-} F(x,y) = (e^{2\pi i y})^n = e^{2\pi i n y}$

$\Rightarrow$ $F(x,y)$ è continua.

$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$F(0,y) = 1 = f_0(y)$

$F(1,y) = e^{2\pi i n y} = f_1(y)$ $\Rightarrow$ $f_0(y) \simeq f_1(y)$

$\Rightarrow$ $\pi_1(\{1\}) \simeq \pi_1(S^1)$, assurdo.

//

---

ex. 2 11/07/2017

$A = [0,1]$ $B = [0,1)$ $C = \mathbb{N} \cap (-2,2)$ $D = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\} \cup \{0\}$

Compattezza in $(\mathbb{R}, \tau_e)$ e $(\mathbb{R}, \tau_s)$.

A compatto in τ_e per Heine-Borell

B non " " " " " –

$C = \{0,1\}$ $\Rightarrow$ compatto in τ_e

D ~~è non~~ compatto poiché chiuso e limitato in τ_e.

A non è compatto in τ_s : $\{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{2}, 1)\}$ non ammette sotto-ricoprimenti finiti

(Se Y compatto in τ_s $\Rightarrow$ Y è numerabile)