LEZIONE 5

ex. 1 24/02/2017

Vero o falso?

(a) Ogni omeomorfismo è un'applicazione sia aperta che chiusa.

VERO. $f: X \longrightarrow Y$ omeomorfismo sse f è biiettiva e bicontinua. Dunque $\exists!\ f^{-1}: Y \longrightarrow X$ inversa di f e continua.

$$\forall\, U \in \tau_X \quad \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{=\, f(U)} \text{ è aperto in } Y$$

Dunque $f(U)$ è aperto in Y $\forall\, U \in \tau_X \Rightarrow f$ è aperta.

Per dimostrare ~~#~~ che f è chiusa il ragionamento è analogo, basta infatti ricordarsi che $f: X \longrightarrow Y$ è continua se equivalentemente

$$f^{-1}(V) \in \tau_X \quad \forall\, V \in \tau_Y$$

oppure

$$f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \quad \forall\, C \text{ chiuso in } Y.$$

b) Ogni applicazione sia ~~##~~ aperta sia chiusa è un omeomorfismo.

FALSO. $f:$ ~~##~~ $[0,1] \longrightarrow \{a,b,c\} = Y$ con top. discreta

X con la topologia meno fine che mi rende continua f.

~~###~~ f è sia aperta che chiusa ma non è ovviamente biiettiva.

Il fatto che f sia ~~##~~ aperta e chiusa non garantisce la biiettività.

(c) Ogni applicazione chiusa è anche aperta.

<u>FALSO</u>. Per esempio, come visto a lezione, la ~~...~~ mappa

$$i : A \subseteq X \hookrightarrow X \quad \text{inclusione è aperta/chiusa}$$

s.se A è aperto/chiuso in X.

(d) Ogni applicazione biiettiva e chiusa possiede inversa continua.

<u>VERO</u>. $f : X \to Y$ biiettiva e chiusa.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Sia C un chiuso di X. Allora $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ è chiuso ~~poiché~~ per ipotesi $\Rightarrow f^{-1}$ è continua.

(e) Ogni applicazione biiettiva e chiusa è anche aperta.

<u>VERO</u>. Per (a)+(d).

---

ex. 2 24/02/2017

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di variabile reale. Si consideri

$d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita così:

$$d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$$

a) Dimostrare che d_f è una metrica su $\mathbb{R}$ s.se f è iniettiva.

$\Rightarrow$) Poiché d_f è metrica allora $\left.\begin{array}{l} d_f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \| \\ |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ~~iniettiva~~ iniettiva

$\Leftarrow$) f iniettiva $\Leftrightarrow$ $f(x)=f(y)$ s.se $x=y$

·) $d_f(x,y)=0 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$
per ipotesi.

Dunque la proprietà di annullamento è verificata.

·) $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=d_f(y,x)$.

Dunque la proprietà di simmetria è verificata.

·) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|$

$\leq |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|=d_f(x,z)+d_f(z,y)$

(per dis. triangolare del modulo)

Dunque la proprietà di dis. triangolare è verificata.

b) Dimostrare che se d_f è una metrica equivalente alla metrica euclidea τ_e su $\mathbb{R}$, allora f è continua.

dim.

Il fatto che d_f sia metrica equiv. $\Rightarrow \exists\, \alpha,\beta>0$ t.c.

$$\alpha \cdot d_e(x,y) \leq d_f(x,y) \leq \beta \cdot d_e(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Per definizione di continuità su sp. metrici, ~~dob~~ dobbiamo verificare che, per ogni fissato $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta=\delta(x_0,\varepsilon) \ \text{t.c. per ogni } x,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{= d_f(x,x_0)}<\varepsilon. \quad (*)$$

ma per ipotesi sappiamo che $d_f(x,x_0)\leq \beta \cdot d_e(x,x_0)=\beta|x-x_0|$

Dunque basta scegliere $\delta=\frac{\varepsilon}{\beta}$ per ottenere $(*)$.

(C) Data f iniettiva, é sempre vero che d_f é topologicamente equivalente a τ_e ?

Vogliamo dimostrare che é falso. Per far ció prendiamo a suggerimento ~~[illegible]~~ il punto precedente. Infatti se f fosse continua otterremmo topologie equivalenti. Dunque costruiamo una f non continua che genera topologie non equivalente a quella euclidea.

Prendiamo $0 \in \mathbb{R}$ e ~~[illegible]~~ l'intorno euclideo $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$

Voglio costruire una funzione f iniettiva t.c. tutte le balle aperte della topologia generata da d_f ~~non~~ e centrate in 0 non sono contenute in $B_1(0)$.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ h(x) & x > 0 \end{cases}$$

t.c. $g((-\infty, 0)) = (-3, -2)$ $\qquad g(x) = -3 + \frac{1}{x+1}$

$h((0, +\infty)) = (2, 3)$ $\qquad h(x) = 3 - \frac{1}{x+1}$

A questo punto $\quad d_f(0, x) = |f(x)| > 2 \quad$ ~~$\Rightarrow B^{d_f}_r(0) \supseteq B_1(0)$~~

$\Downarrow$

$\{0\}$ é aperto in τ_{d_f} $\Rightarrow$ $\nexists\ B^{d_e}_r(0) \subseteq \{0\}$

e quindi le due topologie non sono equivalenti.

//

ex. 3 24/02/2017

Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti e quali sono connessi quando vengono dotati delle seguenti topologie:

τ_-, topologia della continuità superiore generata dagli intervalli $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$.

τ_e topologia euclidea

τ_S topologia di Sorgenfrey, generata da $[a, b)$

$A = (0, 1]$ $B = [0, 1)$ $C = (-\infty, 1]$

dim.

Osservazione preliminare: $\tau_- \subsetneq \tau_e \subsetneq \tau_S$ → già visto a lezione

Il fatto che $\tau_- \subseteq \tau_e$ viene dal fatto che

$$(-\infty, a) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{(-m, a)}_{\in \tau_e}$$

CONTINUA: VEDERE LEZIONE 6.

ex. 4 24/02/2017

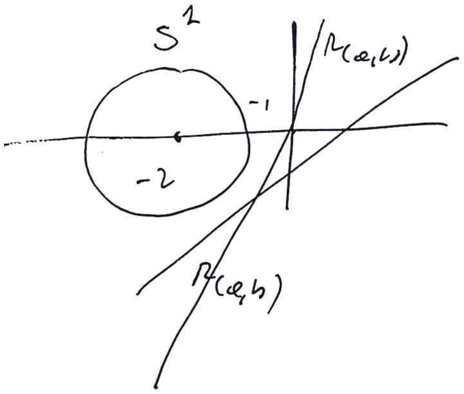
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con top. euclidea.

$$S^1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 1 \}$$

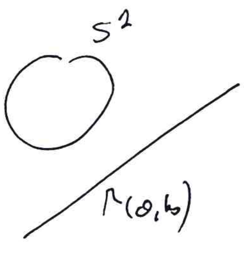
$$R_{(a,b)} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Si dividano gli spazi $X_{(a,b)} := S^1 \cup R_{(a,b)}$ in classi di omeomorfismo e di equivalenza omotopica al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

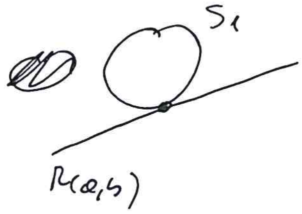
dim



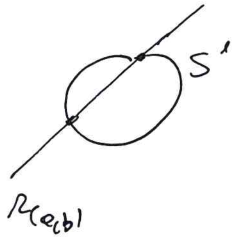
CASO 1



CASO 2



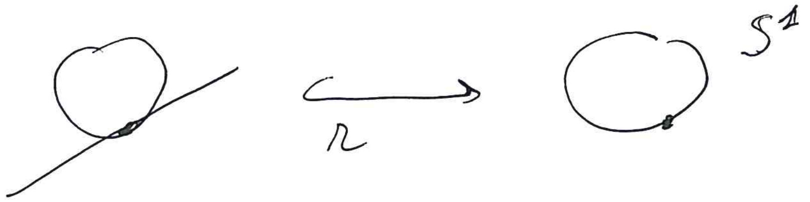
CASO 3



CASO 1 $\quad \pi_1(X_{(a,b)}) \simeq \mathbb{Z}$ $\quad$ infatti $X = S^1 \times R_{(a,b)}$

$$\pi_1(S^1 \times R_{(a,b)}) = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\!\wr}{\pi_1(S^1)}} \times \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(R_{(a,b)})}}$$

CASO 2 $\quad \pi_1(X) \simeq$



retratto $r_{(a,b)}$ sul p.to. $\Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$

$X_{(a,b)} \underset{omot.}{\simeq} S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

<u>CASO 3</u>

$= \underset{\text{wedge}}{S^1 \wedge S^1}$

$\Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1 \wedge S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Da ciò deduciamo che CASO 3 non può essere omotopicamente equiv. a CASO 2 e CASO 1.
(e neppure omeomorfo).

CASO 1 e CASO 2 non sono nella stessa classe di omeomorfismi poiché CASO 1 ha 2 componenti connesse e ~~a~~ CASO 2 una sola x4 11/07/2017

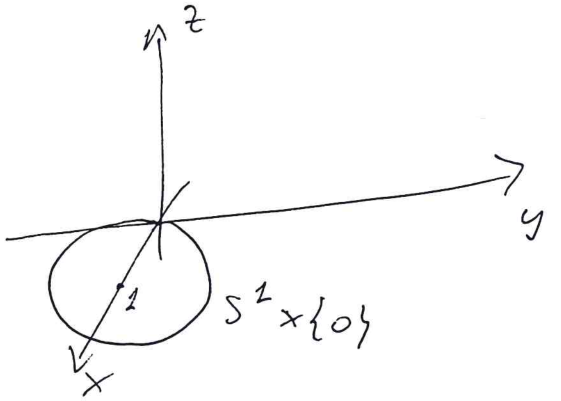
Calcolare gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2-2x+y^2+z^2)^2+z^2=0\}$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2-2x+y^2+z^2)z=0\}$$

X) $(x^2-2x+y^2+z^2)^2+z^2=0 \iff z=0$ et $x^2-2x+y^2+z^2=0$

$$\iff \begin{cases} z=0 \\ x^2-2x+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

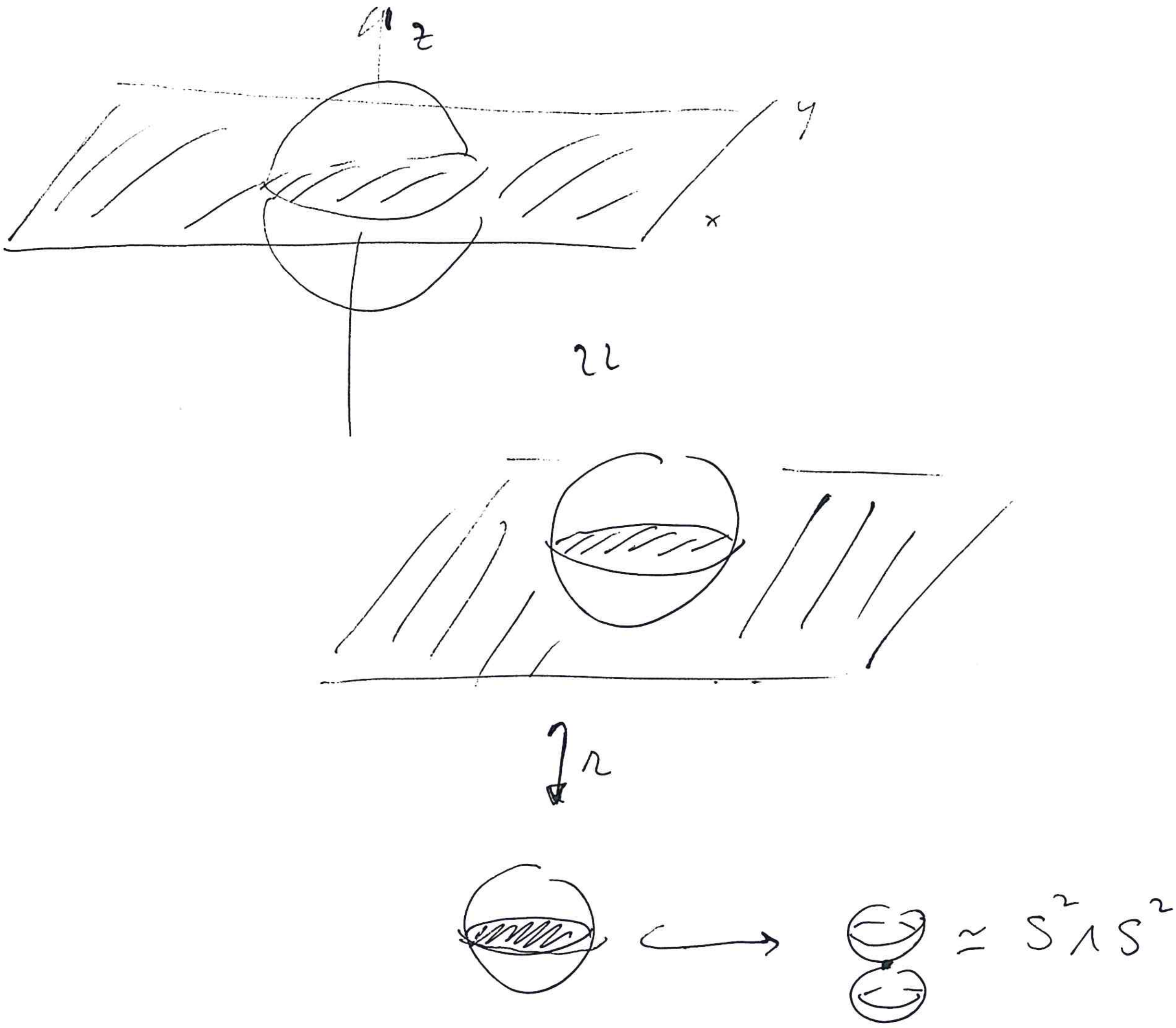


$$X \simeq S^1\times\{0\} \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1)\times\pi_1(\{0\}) \simeq \mathbb{Z}$$

Y) $(x^2-2x+y^2+z^2)z=0 \iff z=0$ oppure

$x^2-2x+y^2+z^2=0 \iff$

$(x-1)^2+y^2+z^2=1$



$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(S^2 \wedge S^2) \simeq \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) \simeq \{0\}$$