ESERCITAZIONE 3

EX. 1

Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}$ una ~~sa~~ partizione (in sottoinsiemi disgiunti).

(a) Mostra che $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$ é una base per una topologia su X. Con abuso di notazione, scrivo $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$.

Ricordiamo che data una collezione di insiemi $\mathcal{B}$, essa é una base per una topologia se:

(i) $X = \bigcup_{i \in I} B_i \;,\; B_i \in \mathcal{B}$

(ii) Sia $x \in I := B_1 \cap B_2 \;,\; B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Allora $\exists\, \hat{B} \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in \hat{B} \subseteq I$.

Ovviamente $X = \bigcup_{I} \{P_i : P_i \in \mathcal{P}\}$

Siano ora $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset$ ~~poiche~~ per la definizione degli elementi in $\mathcal{P}$. $\emptyset \in \mathcal{P}$.

Dunque $\mathcal{P}$ é una base per la topologia

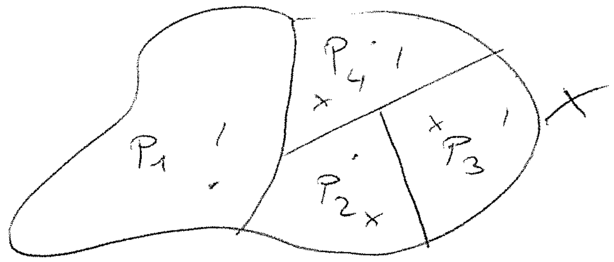
$$\tau_{\mathcal{P}} := \left\{ \bigcup_{i \in I} P_i : P_i \in \mathcal{P} , \; I \text{ insieme di indici} \right\}$$

(b) Mostra che un sottoinsieme S di X è aperto s.se S è chiuso.

Se $S \in \tau_{\mathcal{P}}$, allora $S = \bigcup_{i\in I} P_i \iff S^c = X \setminus S =$

$$= X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} P_i\right) = \bigcap_{i\in I} X \setminus P_i \in \mathcal{P}$$

$$= \bigcup \{P_j \in \mathcal{P} : j \notin I\} \in \mathcal{P}$$



$$S = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \Rightarrow S^c = P_1^c \cap P_2^c \cap P_3^c = P_4$$

Conseguentemente al fatto che $S^c \in \mathcal{P} \iff S$ è chiuso

(c) Considera le due partizioni $\mathcal{P}_1 := \{X\}$

$\mathcal{P}_2 := \{\{x\} \mid x \in X\}$

Descrivi le topologie associate ad esse.

$\tau_{\mathcal{P}_1}$ topologia concreta (o anche detta banale)

$\tau_{\mathcal{P}_2}$ topologia discreta.

La topologia discreta è tale che

$$\tau_d = \{U : U \subseteq X\}$$

Ovviamente $\forall U \subseteq X$ vale che

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$$

(d) La topologia associata ad una partizione $\mathcal{P}$ diversa da $\mathcal{P}_1$ e da $\mathcal{P}_2$ è T_0?

Ricordiamo che uno spazio top. (X, τ) è T_0 se

$\forall\, x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists\, V \in \tau$ t.c.

$x_1 \in V$ e $x_2 \notin V$, e viceversa.

(1° assioma di separabilità).

(EX. Dimostrate che $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono spazi T_0)

Siano $x_1 \neq x_2 \in X$. Ovviamente, $x_1 \in P_1 \in \mathcal{P}$.

Se $x_2 \notin P_1 \Rightarrow$ vero. Ma cosa succede se $x_2 \in P_1$?

Posso trovare un aperto $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ t.c. $x_1 \in V$ e $x_2 \notin V$?

$V = \bigcup_{i \in I} P_i \Rightarrow x_1 \in P_i$ (P_i unici $\Rightarrow P_i \equiv P_1$) e supponiamo che

$x_2 \notin V \Rightarrow x_2 \notin P_i \Rightarrow$ ~~$x_2 \in (P_i)^c \Rightarrow x_1$ e x_2~~

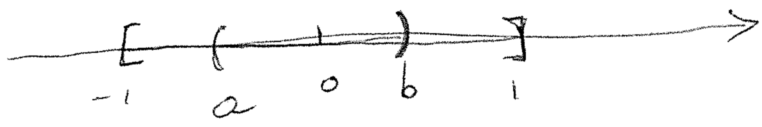
~~non possono sceglierli nello stesso insieme di partizione~~

$\Rightarrow x_2 \notin P_1$. $\lightning$ ~~assurdo~~

Quindi, se x_1 e x_2 appartengono allo stesso insieme di partizione P_1, non possono essere separati.

$\boxed{\text{ex. 2}}$

Sia $X = [-1, 1]$ dotato della topologia τ generata dagli insiemi della forma $[-1, b)$, con $b > 0$, e $(a, 1]$ con $a \leq 0$.



Mostra che:

(a) la topologia τ é (strettamente) meno fine della topologia euclidea τ_e, e che una sua base é data dagli insiemi $[-1, b)$, $(a, 1]$ e (a, b) con $a < 0 < b$.

Osserviamo che:

$$\bigcup \left\{ [-1, b) : b \in I,\ I \subseteq (0, 1] \right\} = [-1, \hat{b})$$

dove $\hat{b} = \sup I$.

allo stesso modo, $\bigcup \left\{ (a, 1] : a \in J,\ J \subseteq [-1, 0) \right\} = (\hat{a}, 1]$, $\hat{a} = \inf J$.

Infine, notiamo che $[-1, b) \cap (a, 1] = (a, b)$ con $a < 0 < b$.

Inoltre, $(a, b) \cup (\bar{a}, 1] = (\bar{a}, 1]$

$(a, b) \cup [1, \bar{b}) = [1, \bar{b})$

$$\bigcup_{\substack{a<0 \\ b>0}} (a, b) = (\hat{a}, \hat{b}), \quad \hat{a} < 0 < \hat{b}$$

Dunque ~~...~~ (a,b), $[-1,b)$, $(a,1]$ sono base per τ.

$\tau \subsetneq \tau_e$ poiché $\tau \subseteq \tau_e$ (top. euclidea indotta) e per esempio $(1/3, 1/2) \notin \tau$ poiché $V \in \tau$ ~~...~~ $\Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \in V$.

(c) la topologia τ è T_0 ma non T_1.

Ricordiamo che uno sp. top. (X, τ) è T_1 se

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists V_1, V_2 \in \tau \quad \text{t.c.}$$

$$x_1 \in V_1, \ x_1 \notin V_2$$

$$x_2 \in V_2, \ x_2 \notin V_1.$$

Mostriamo che τ è T_0.

Siano $x_1 \neq x_2 \in [-1, 1]$ e supponiamo $x_1 < x_2$, senza ledere la generalità della dimostrazione.

Indichiamo con $\delta = |x_1 - x_2| = x_2 - x_1$. ~~dunque se~~
~~scegliamo $V_1 = [-1, x_1 + \frac{\delta}{2})$ e $V_2 = (x_2 - \frac{\delta}{2}, b)$~~

Se ~~...~~ $x_2 < 0$, allora scegliamo $V_2 = (x_2 - \frac{\delta}{2}, 1]$

Se $x_2 > 0$, ~~allora~~ e $x_1 < 0$ e scelgo un aperto $V_2 = (x_1 + \varepsilon, x_2 + \eta)$ con $\varepsilon = \frac{|x_1|}{2}$. $\eta = \frac{|1 - x_2|}{2}$

Se $x_2 > 0$ e $x_1 > 0$, allora scegliamo $V_1 = [-1, x_1 + \frac{\delta}{2})$

Mostriamo che τ non è T_1.

0 non può essere separato ~~...~~ da alcun punto $x \neq 0$.

Infatti, sia $x \neq 0$. Abbiamo che ogni insieme aperto di τ

é tale che $\underline{o} \in V$. $\Rightarrow \nexists\, V_1, V_2$ t.c.

$\underline{o} \notin V_1$ e $\underline{o} \notin V_2$.

---

ex. 3

Sia (X, d) con $X = \mathbb{R}^2$ e $d = d_{euclidea}$, cioè

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definiamo $d^* : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$d^*(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{x} = \underline{y} \\ \underbrace{d(\underline{x}, \underline{o}) + d(\underline{y}, \underline{o})}_{\shortparallel} & \text{se } \underline{x} \neq \underline{y} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{1/2}$$

Dimostra che:

(a) d^* é una metrica su X.

1) $d^*(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Rightarrow \underbrace{d(\underline{x}, \underline{o})}_{\geq 0} + \underbrace{d(\underline{y}, \underline{o})}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow d(\underline{x}, \underline{o}) = 0$ et $d(\underline{y}, \underline{o}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x} = \underline{o}$ et $\underline{y} = \underline{o} \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}$.

~~$x = y$~~ Se $\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow d^*(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ per definizione.

2) $d^*(\underline{x}, \underline{y}) = d^*(\underline{y}, \underline{x})$ ovvio ~~B~~.

$= d(\underline{x}, \underline{o}) + d(\underline{y}, \underline{o})$ ~~= (per la prop. di simmetria di $d(\cdot,\cdot)$) = $d(\underline{o}, \underline{x}) + d(\underline{o}, \underline{y})$~~ $= d(\underline{o}, \underline{y}) + d(\underline{o}, \underline{x}) =$

$= d^*(\underline{y}, \underline{x})$

3) Siano $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^2$.

$d^*(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{x}, \underline{0}) + d(\underline{y}, 0) \leq$ (poiché $d(\cdot,\cdot)$ è una distanza) $\leq \underbrace{d(\underline{x}, \underline{0}) + \underbrace{d(\underline{z}, 0)}_{\geq 0}} + \underbrace{d(\underline{y}, \underline{0}) + \underbrace{d(\underline{z}, \underline{0})}_{\geq 0}} =$

$= d^*(\underline{x}, \underline{z}) + d^*(\underline{z}, \underline{y}) \cancel{= d(\underline{x}, 0) + d(\underline{z}, 0) + d(\underline{z}, 0) + d(\underline{y}, 0)}$

(b) La topologia indotta dalla metrica d^* su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ è quella discreta.

Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ e sia $B^*(\underline{x}, r) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} : d^*(\underline{x}, \underline{y}) < r\}$

indichiamo con $\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) > 0$ poiché $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Allora $d^*(\underline{x}, \underline{y}) < \frac{\|x\|}{2}$ se $\underline{x} \neq \underline{y}$

$$\left(\sum x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum y_i^2\right)^{1/2} = \|x\| + \|y\| < \frac{\|x\|}{2} \iff$$

$$\iff \|y\| < -\frac{\|x\|}{2} \quad \text{assurdo.}$$

Dunque questo dimostra che

$$B^*\left(x, \frac{\|x\|}{2}\right) = \{x\}$$

Poiché $\{x\} \in \tau \Rightarrow \tau_{\text{discreta}} \subseteq \tau$ ma

$\tau \subseteq \tau_{\text{discreta}}$ sempre $\Rightarrow \tau_{\text{discreta}} = \tau$.

(d) Le bolle aperte centrate in $\underline{0}$ sono anche chiuse.

Sia data $B^*(\underline{0}, r) = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d^*(\underline{0},\underline{y}) = (\sum y_i^2)^{1/2} < r \}$

Sia data una successione $\{\underline{y}_n\} \subseteq B^*(\underline{0}, r)$ t.c. $\underline{y}_n \longrightarrow \underline{x}$. Mostriamo che $\underline{x} \in B^*(\underline{0}, r)$.

$$\cancel{d^*(\underline{0},\underline{x}) = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2} = \|x\|}$$

$$\|$$

$$\cancel{\underbrace{\left(\sum x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum y_{i,n}^2\right)^{1/2}}_{= d^*(\underline{x},\underline{y}_n)} - \underbrace{\left(\sum y_{i,n}^2\right)^{1/2}}_{= d^*(\underline{0},\underline{y}_n)} =}$$

$$\cancel{= \underbrace{d^*(\underline{x},\underline{y}_n)}_{= \cancel{\frac{1}{n}}} - \underbrace{d^*(\underline{0},\underline{y}_n)}_{<r} > \frac{1}{n} - r \longrightarrow -r}$$

$$d^*(\underline{x},\underline{y}_n) \longrightarrow 0$$

$$\|$$

$$\left(\sum x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum y_{i,n}^2\right)^{1/2} = \underbrace{d(\underline{0},\underline{x}) + \underbrace{\boxed{d(\underline{0},\underline{y}_n)}^{<r}}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$0 = \lim d^*(\underline{x},\underline{y}_n) = d(\underline{0},\underline{x}) + \lim d(\underline{0},\underline{y}_n) =$$

(Poiché $d(\underline{0},\cdot)$ è una funzione continua) $\rightarrow$ $= d(\underline{0},\underline{x}) + d(\underline{0}, \lim \underline{y}_n)$

$$= d(\underline{0},\underline{x}) + d(\underline{0},\underline{x}) = 2\, d(\underline{0},\underline{x}) = 2\|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} \in B^*(\underline{0}, r)$$

<u>esercizio</u>. mostrate che ogni successione convergente, ha come p.to limite <u>0</u>.