Geometria 1. Prova del 15 febbraio 2018

Soluzioni

1) Vero o Falso?

(a) Ogni omeomorfismo è un'applicazione sia aperta sia chiusa. Vero

Un omeomorfismo $\varphi: X \to Y$ tra due spazi topologici X e Y è un'applicazione continua biiettiva con inversa continua.

Dunque è aperta: $\forall A \subseteq X$ aperto

$\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A)$ aperto perché φ^{-1} è continua

$\forall C \subseteq A$ chiuso

$\varphi(C) = (\varphi^{-1})^{-1}(C)$ chiuso perché φ^{-1} è continua.

(b) Ogni applicazione sia aperta sia chiusa è un omeomorfismo.

No per esempio dato $\mathbb{R} \longrightarrow \{Pto\}$ applicazione costante da $\mathbb{R}$ (con qualunque topologia) nel singoletto $\{P\}$ è aperta e chiusa ma non è biiettiva. Dunque non è un omeomorfismo.

(c) Ogni applicazione chiusa è suriettiva è una mappa quoziente.

(se chiedo anche continua è vero: è il lemma 5.4 del Manetti)

Falso: controesempio: $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$ $\not\Downarrow$

$\mathcal{C}$: topologia concreta, $\mathcal{D}$: topologia discreta

Tale f è suriettiva e chiusa ma
$\mathcal{D}$ non è la topologia quoziente indotta da f:
ad esempio $\{0\} \in \mathcal{D}$ ma $f^{-1}(0) = \{0\} \notin \mathcal{C}$.

(d) Ogni applicazione biiettiva e chiusa possiede un' inversa continua.

Vero: sia $f: X \longrightarrow Y$ biiettiva e chiusa
sia $g: Y \longrightarrow X$ la sua inversa.
allora $\forall\, C \subseteq X$ chiuso $g^{-1}(C) = f(C)$
è chiuso in X per ipotesi. Ma allora g
è continua.

(e) ogni applicazione biiettiva e chiusa è anche aperta:

Vero sia $f: X \to Y$ biiettiva chiusa
sia A aperto in X $\quad f(A) \underset{f \text{ biiettiva}}{=} Y \setminus f(\underbrace{Y \setminus A}_{\text{chiuso}})$
siccome $f(Y \setminus A)$ è chiuso perché f è chiusa
dunque $f(A)$
è aperto.

2) Sull' insieme $\mathbb{N}$ dei naturali,

Sia τ la topologia generata da

$$\mathcal{F} = \{\{0,1\}, \{1,2\}\}$$

a) τ topologia generata da $\mathcal{F}$ è la ~~più piccola~~ meno fine topologia su $\mathbb{N}$ che contiene $\mathcal{F}$

Dunque, essendo τ una topologia, deve contenere $\mathbb{N}$, ϕ e $\{1\} = \{0,1\} \cap \{1,2\}$

D'altra parte se prendo la famiglia

$\{\mathbb{N}, \phi, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}$ è immediato vedere che è una topologia su $\mathbb{N}$, quindi

$$\tau = \{\mathbb{N}, \phi, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}$$

b) $\mathcal{F}$ è una base per τ? No perchè

$\mathcal{B}$ base per τ $\Leftrightarrow$ ogni aperto di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$

ma
- $\mathbb{N}$ non è unione di elementi di $\mathcal{F}$
- $\{1\}$ " " " "

quindi $\mathcal{F}$ non è una base per τ.

(c) $(\mathbb{N}, \tau)$ è compatto?

L'insieme τ è <u>finito</u>, quindi è banalmente vero che ogni ricoprimento aperto di $\mathbb{N}$ è finito. Quindi $(\mathbb{N}, \tau)$ è compatto.

(d) $(\mathbb{N}, \tau)$ è metrizzabile? [in un compito scrivere la def. di metrizzabile e di T2]

metrizzabile $\Rightarrow$ T2

Osserviamo che $(\mathbb{N}, \tau)$ non è T2, dunque non è metrizzabile.

Considero ad esempio $x = 0$ $y = 2$ in $\mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{U}$ aperto di τ che contiene x

$\Rightarrow \mathcal{U} = \mathbb{N}$ oppure $\mathcal{U} = \{0, 1\}$ per def. di τ

sia $\mathcal{V}$ aperto di τ che contiene y

$\Rightarrow \mathcal{V} = \mathbb{N}$ oppure $\mathcal{V} = \{1, 2\}$

sempre per la definizione di τ.

Dunque per qualunque scelta io faccia,

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \ni 1$, dunque $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \phi$

(e) $(\mathbb{N}, \tau)$ è confrontabile con la topologia euclidea? Mi chiedo dunque:

Vale una delle due inclusioni $\tau \subseteq \tau_e$ oppure $\tau_e \subseteq \tau$?

Ma τ_e su $\mathbb{N}$ è la topologia discreta:

ogni $n \in \mathbb{N}$ è aperto: $(-\frac{1}{2} + n, n + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{n\}$

la topologia discreta è confrontabile con qualunque topologia. Vale infatti $\tau \subseteq \tau_e$ (vale anche $\subsetneq$)

3) X e Y spazi topologici

$X \times Y$ spazio prodotto

(a) $X \times Y$ è connesso per archi (cpa) sse X e Y sono cpa.

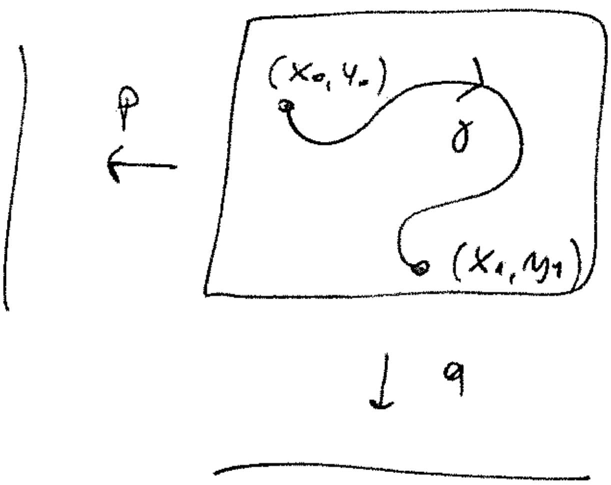
Prima ricordiamo queste proprietà della topologia prodotto:

$\forall\, f : \underset{\text{sp.top}}{Z} \longrightarrow X \times Y$ $\quad f$ è continua sse $p \circ f : Z \to X$ e $q \circ f : Z \to Y$ sono continue $\qquad (*)$

dove $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \longrightarrow Y$ sono le due proiezioni.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $X \times Y$ cpa: $\forall (x_0, y_0) \in X \times Y$, $(x_1, y_1) \in$

$\exists\, \gamma : I \to X \times Y$ continua con $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(1) = (x_1, y_1)$



Sia ora $x_0, x_1 \in X$ prendo un qualunque $\bar{y} \in Y$.

Per ipotesi $\exists\ \gamma : I \to X \times Y$ continua tc

$\gamma(0) = (x_0, \bar{y}) \qquad \gamma(1) = (x_1, \bar{y})$

Allora $p \circ \gamma : I \longrightarrow X$ ed è continua per (*)

e $p \circ \gamma(0) = p(x_0, \bar{y}) = x_0$

e $p \circ \gamma(1) = p(x_1, \bar{y}) = x_1$.

Lo stesso discorso (con $y_0, y_1 \in Y$ e q) lo posso fare su Y

$\boxed{\Leftarrow}$ Siano X e Y cpa.

Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$

cerco un arco tra questi punti. So che

$\exists\ \alpha : I \to X$ arco tra x_0 e x_1 in X

$\exists\ \beta : I \to Y$ " " y_0 e y_1 in Y

Allora $\alpha \times \beta : I \longrightarrow X \times Y$

così definito $\alpha \times \beta(t) := (\alpha(t), \beta(t)) \in X \times Y$

$\forall t \in I$

è un arco (è continuo per (*) perché

$p \circ (\alpha \times \beta) = \alpha$

e $q \circ (\alpha \times \beta) = \beta$)

in $X \times Y$ tra (x_0, y_0) e (x_1, y_1) OK

(b) $X \times Y$ è di Hausdorff sse X e Y lo sono.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dimostriamo che se X non è T2 allora $X \times Y$ non lo è:

(*) Siano $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$ tali che $\forall\, \mathcal{U}_0 \ni x_0$ $\forall\, \mathcal{U}_1 \ni x_1$ aperti in X $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$

considero ora $\overline{y} \in Y$

e considero $(x_0, \overline{y})$ e $(x_1, \overline{y}) \in X \times Y$

sono due punti distinti di $X \times Y$.

ora osservo che $\forall\, \mathcal{W}_0$ aperto in $X \times Y$ che contiene $(x_0, \overline{y})$ e $\forall\, \mathcal{W}_1$ aperto in $X \times Y$ che contiene $(x_1, \overline{y})$

ho che $\exists\, \mathcal{U}_0$ aperto in X tc $x_0 \in \mathcal{U}_0$
$\exists\, \mathcal{V}_0$ " " Y tc $\overline{y} \in \mathcal{V}_0$

ed $\exists\, \mathcal{U}_1$ aperto in X tc $x_1 \in \mathcal{U}_1$
$\exists\, \mathcal{V}_1$ " " Y tc $\overline{x} \in \mathcal{V}_1$

tc $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{W}_0$ e $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{W}_1$

(questo perché
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U} \times \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in \tau_X, \mathcal{V} \in \tau_Y\}$$ è una <u>base</u> per la top. prodotto

<u>allora</u> per (*) $\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset \\ \text{e } \overline{y} \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0) \cap (\mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1) \neq \emptyset$

Dunque $\mathcal{W}_0 \cap \mathcal{W}_1 \neq \emptyset$ $\boxed{\text{ok}}$

(c) Se prodotto di spazi semplicemente connessi è semplicemente connesso.

Ricordiamo che Z spazio topologico è semplicemente connesso se è cpa e $\forall z_0 \in Z \quad \pi_1(Z, z_0) = \{[\varepsilon_{z_0}]\}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Siano X e Y sempl. connessi.

In particolare X e Y sono cpa e per il punto (b) $X \times Y$ è cpa.

Sia $(x_0, y_0) \in X \times Y$

so che

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per} \\ \text{ipotesi}}}{\cong} \{[\varepsilon_{x_0}]\} \times \{[\varepsilon_{y_0}]\} =$$

$$= \{[\varepsilon_{(x_0, y_0)}]\}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia $X \times Y$ semplicemente connesso.

In particolare è cpa e per (b) X e Y sono cpa.

Sia ora $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ per l'isomorfismo scritto sopra

$$\{[\varepsilon_{(x_0, y_0)}]\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{=} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

quindi $\pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ e $\pi_1(Y, y_0) = \{[\varepsilon_{y_0}]\}$ $\boxtimes$