

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 4 febbraio 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Una topologia in cui ogni aperto è chiuso è la topologia discreta.
 - (b) Una topologia che ammette una base i cui elementi sono chiusi (oltre che ovviamente aperti) è la topologia discreta.
 - (c) In qualunque topologia separabile i punti sono chiusi.
 - (d) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono chiusi.
 - (e) Una topologia metrizzabile e separabile è secondo numerabile (a base numerabile).
2. Consideriamo un insieme di quattro elementi $X = \{a, b, c, d\}$.
 - (a) Quali sono le topologie metrizzabili su X ?
 - (b) Quali tra le seguenti famiglie

$$\mathcal{B}_1 := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d\}\}$$

$$\mathcal{B}_3 := \{\{d\}, \{d, b\}, \{a, c\}\}$$

sono una base per una topologia su X ? Per quelle che lo sono, scrivere gli aperti della topologia che inducono.

- (c) Siano \mathcal{T}_i le topologie generate dai \mathcal{B}_i che sono una base. Stabilire quando (X, \mathcal{T}_i) è connesso e quando è connesso per archi.
 - (d) Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Esistono topologie \mathcal{T}_X su X tali che (X, \mathcal{T}_X) è omeomorfo allo spazio prodotto $(Y, \mathcal{T}_Y^1) \times (Y, \mathcal{T}_Y^2)$, per qualche coppia di topologie $\mathcal{T}_Y^1, \mathcal{T}_Y^2$, su Y ? Se sì, esibire un esempio, se no, dimostrarlo.
 - (e) Esistono topologie \mathcal{T}_X su X tali che (X, \mathcal{T}_X) non è omeomorfo allo spazio prodotto $(Y, \mathcal{T}_Y^1) \times (Y, \mathcal{T}_Y^2)$, per nessuna coppia di topologie $\mathcal{T}_Y^1, \mathcal{T}_Y^2$, su Y ? Se sì, esibire un esempio, se no, dimostrarlo.
3. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, con la topologia indotta da quella euclidea.
 - (a) È connesso per archi?
 - (b) Calcolarne il gruppo fondamentale.
 - (c) Il sottospazio $X \cap \{x = 0\}$ è un retratto di X ?