Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 26 giugno 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Una topologia in cui ogni aperto è chiuso è necessariamente la topologia discreta. *[2,5 punti]*
   (b) Una topologia in cui i punti sono aperti è necessariamente la topologia discreta. *[2,5 punti]*
   (c) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono necessariamente chiusi. *[2,5 punti]*
   (d) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono necessariamente chiusi e non aperti. *[2,5 punti]*

2. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}_+ = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ la topologia della semicontinuità superiore.
   (a) Dimostrare che, con la topologia $\mathcal{T}$, ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso. *[2,5 punti]*

   Siano $F := (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}, E := \mathbb{R} \setminus F$, sempre con la topologia $\mathcal{T}$.

   (b) F è aperto? Qual è la sua parte interna? È chiuso? Stesse domande per E. *[2,5 punti]*
   (c) F è denso? Stessa domanda per E. *[2,5 punti]*
   (d) F è compatto? Stessa domanda per E. *[2,5 punti]*

   Sia ora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

   $$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ per } x < 1 \\ x+1 \text{ per } x \geq 1 \end{cases}$$

   (e) Stabilire se f è continua da: *[2,5 punti]*
      i. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$;
      ii. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$;
      iii. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

3. Si consideri la seguente famiglie di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia eulcidea, dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

   $$X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 4x + 3) = 0\} \subset \mathbb{R}^\cdot$$

   (a) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio X_a è compatto, e per quali è connesso. *[2 punti]*
   (b) Suddividere gli X_a in classi di omeomorfismo al variare di $a \in \mathbb{R}$. *[3,5 punti]*
   (c) Stabilire se per qualche $a \in \mathbb{R}$ e per qualche $n \in \mathbb{N}$, lo spazio X_a è omotopicamente equivalente al bouquet di n circonferenze. *[3,5 punti]*