Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta dell'8 febbraio 2017

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un sottospazio di uno spazio T2 è T2;
   (b) un sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile;
   (c) un sottospazio di uno spazio connesso è connesso;
   (d) un sottospazio di un spazio localmente compatto è localmente compatto (ricordiamo che uno spazio topologico è localmente compatto se ogni suo punto possiede un intorno compatto);
   (e) un sottospazio chiuso di un spazio localmente compatto è localmente compatto.

2. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la seguente funzione:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (n,m) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } n=m \\ 1+\frac{1}{n+m} & \text{se } n\neq m. \end{cases} \end{array}$$

   (a) Mostrare che d è una distanza;
   (b) descrivere la topologia generata da d su $\mathbb{N}$.

3. Sia $f\colon (X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
   (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua.
   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia concreta allora f è continua se e solo se f è costante.
   (c) Dimostrare che se f è continua e $\{x_n\}$ è una successione in X che converge a x_0 in X allora $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$ in Y.

4. Classificare a meno di omeomorfismo ed equivalenza omotopica i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

   S^2;
   $X := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2, z\in[-1,1]\}$;
   $Y := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2, z\in(-1,1)\}$;
   $Z := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1, z=0\}$;
   $T := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2-1)z=0\}$.