Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 1 febbraio 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
   (b) Un sottospazio compatto di uno spazio topologico è chiuso.
   (c) Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.
   (d) Un sottospazio chiuso di uno spazio di Hausdorff è compatto.
   (e) Un sottospazio di Hausdorff di uno spazio compatto è chiuso.

2. Trovare le componenti connesse dei seguenti spazi:
   (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ ($\mathbb{R}$ con la topologia discreta).
   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey).
   (c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, (\mathcal{T}_{-})_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la topologia indotta da quella della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{-} = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$).

3. (a) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$.
   (b) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione aperta e sia $D \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X.
   (c) Dimostrare che l'ipotesi che f sia aperta nel punto precedente è necessaria.

4. Si consideri $I = [0, 1]$ con la topologia euclidea, $Y := \{a, b\}$ con la topologia $\{Y, \emptyset, \{a\}\}$ e sia $X := I \times Y$ lo spazio prodotto.
   (a) Si stabilisca se X è connesso per archi.
   (b) Si stabilisca se X è compatto.
   (c) Si stabilisca se X è T0, T1, T2.
   (d) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.