Soluzioni scritto di Geometria 1 dell'1 febbraio 2018

Lidia Stoppino

1) Vero o Falso?

(a) Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. Vero.

Sia X uno spazio compatto, sia $C \subseteq X$ un chiuso. Voglio dimostrare che C è compatto. Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di C, cioè una famiglia di $U_\alpha \in \tau_X$ tali che

$$C \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Considero la famiglia

$$\mathcal{A} := \{X \setminus C\} \cup \{U_\alpha, \alpha \in A\}$$

È un ricoprimento aperto di X.
Per la compattezza di X $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k \in A$ tali che $X = (X \setminus C) \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$

Dunque in particolare $C \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$, ed abbiamo mostrato che il ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di C possiede un sottoricoprimento finito.

(b) Un compatto in uno spazio X è sempre chiuso.

Falso: ad esempio se considero $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ ogni sottoinsieme è compatto, ma solo $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono chiusi.

(c) Un compatto in uno spazio $T2$ è sempre chiuso.

Vero: Sia $K \subseteq X$ con K compatto, X T2.

Dimostriamo che $X \setminus K$ è aperto. Sia $y \in X \setminus K$

~~$\forall y \in X \setminus K$~~ $\forall\, k \in K \quad \exists\, U_k, V_k$ (aperti in X) tali che

$y \in U_k, \quad k \in V_k \quad$ e $\quad U_k \cap V_k = \emptyset$

La famiglia dei V_k è ovviamente un ricoprimento aperto di K. Per la compattezza di K estraggo un sottoricoprimento finito:

$\exists\, k_1, \dots, k_r$ tali che

$$K \subseteq V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_r}.$$

Se ora considero $\displaystyle U := \bigcap_{i=1}^{r} U_{k_i}$

questo è un aperto che contiene y tale che

$$U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r} V_{k_i} \right) = \emptyset$$

dunque in particolare $U \cap K = \emptyset$

quindi U è un intorno aperto di y tutto contenuto in $X \setminus K$. fine

(d) Un chiuso in un T2 è compatto.

Falso. $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è chiuso in sé stesso e non è compatto.

(e) Sottospazio T2 di un compatto è chiuso.

Falso. prendiamo $[0,1]$ con topologia euclidea. $(0,1) \subseteq [0,1]$ è T2 e non è chiuso.

2) Trovare le componenti connesse dei seguenti spazi:

Ricordo che dato uno spazio X, le sue componenti connesse sono i sottospazi connessi massimali. Cioè $C \subseteq X$ è componente connessa se:
- è connessa
- $\forall$ D connesso tale che $D \supseteq C$ $\Rightarrow$ $C = D$

Ricordo altresì che le componenti connesse formano una partizione di X: $\forall x \in X$ $\exists!$ $C_x \subseteq X$ componente connessa che contiene x.

(a) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. gli unici connessi in uno spazio discreto sono i punti. Infatti se $S \subseteq (X, \mathcal{D})$ ha almeno due punti distinti $x, y \in S$, $x \neq y$ allora

$S \setminus \{x\}$ è sia aperto sia chiuso proprio $\Rightarrow$ S non è connesso.

Dunque le componenti connesse sono tutti e soli i punti di X.

(b) $(\mathbb{R}, \tau_S)$ Osserviamo che (anche se questa topologia NON è discreta) vale che $\forall S \subseteq \mathbb{R}$ con $|S| > 1$, S non è connesso: se $\exists x, y \in S$ con $x < y$ $S = \underbrace{((-\infty, y) \cap S)}_{\ni x} \cup \underbrace{([y, +\infty) \cap S)}_{\ni y}$ unione di aperti ~~e chiusi dis~~ disgiunti. Dunque di nuovo le componenti connesse sono i punti.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\tau_-|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

$$\tau_- = \{(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

topologia
della semicontinuità

dunque $\forall\ U, V \in \tau_-|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ vale che

$$U \subseteq V \quad \text{oppure} \quad V \subseteq U.$$

Dunque non esistono aperti disgiunti non
vuoti, e quindi $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ con questa
topologia è connesso.
Ma allora $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è la sua (unica) componente
connessa.

3)

(a) $f: X \to Y$ applicazione continua

$A \subseteq X$ sottoinsieme denso.

Dimostriamo che $\overline{f(A)}$ è denso in $f(X)$.

- Devo vedere che $\overline{f(A)} \supseteq f(X)$.

f continua $\iff \forall\, S \subseteq X \quad f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$

Dunque abbiamo che in particolare

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{perché } A \text{ è denso in } X.}}{f(X) = f(\overline{A})} \subseteq \overline{f(A)}$$

<u>fine</u>

- Altra dimostrazione:

sia $\mathcal{U}$ aperto in Y tale che $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$

devo vedere che $\mathcal{U} \cap f(A) \neq \emptyset$.

considero

$f^{-1}(\mathcal{U})$ aperto in X non vuoto

allora essendo A denso $A \cap f^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$

allora $f(A \cap f^{-1}(\mathcal{U})) \neq \emptyset$

$$f(A \cap f^{-1}(\mathcal{U})) = f(A) \cap \mathcal{U}$$

<u>fine</u>

(b) Sia $f: X \to Y$ un'applicazione aperta e sia $D \subseteq Y$ un sottoinsieme denso.

Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X.

Sia $\mathcal{U} \neq \emptyset$ aperto in X devo vedere che

$f^{-1}(D) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

$f(U) \subseteq Y$ è aperto non vuoto perché f è aperta

dunque $D \cap f(U) \neq \emptyset$ perché D è denso in Y.

Questo significa che $\exists\, z \in D$ tc $\exists\, y \in U$

tale che $f(y) = z$

cioè $y \in U \cap f^{-1}(D)$ come volevamo.

(attenzione che $f^{-1}(D \cap f(U))$ non è

detto che sia $= f^{-1}(D) \cap U$, però quello

che stiamo usando è che

$$f(f^{-1}(D) \cap U) = \underset{\neq\,\emptyset}{D \cap f(U)}$$

fine

(c) Dimostrare che l'ipotesi che f sia aperta nel punto precedente è necessaria.

Dunque dobbiamo fare un esempio con f non aperta e $D \subseteq Y$ denso tale che $f^{-1}(D)$ non sia denso.

Prendiamo ad esempio X insieme qualsiasi con $|X| > 1$

$$f = id_X : (X, \infty) \longrightarrow (X, \mathcal{C})$$

f non è aperta perché $\exists\, \underset{\neq\,\emptyset}{S} \subsetneq X$ che è aperto (comunque) per ∞ ma non per $\mathcal{C}$

Qualunque $D \subseteq X$ è denso con la topologia concreta $\mathcal{C}$

sia dunque $x \in X$ $f^{-1}(x) = x$ che non è denso in (X, ∞).

4) $I = [0,1]$ con $\tau_e|_{[0,1]}$

$Y = \{a, b\}$ con $\tau_Y = \{ Y, \emptyset, \{a\} \}$

$X := I \times Y$ con topologie prodotto

(a) Sì, X è connesso per archi.

Infatti, I è connesso per archi.

Per vedere che Y è connesso per archi basta trovare un arco tra a e b

cioè un'applicazione continua $\alpha : I \longrightarrow Y$

tale che $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$

per costruire un'applicazione continua le condizioni sono

$$\underset{I}{\underbrace{\alpha^{-1}(Y)}} \in \tau_e|_{[0,1]} \quad \text{sempre vera}$$

$$\emptyset = \alpha^{-1}(\emptyset) \in \tau_e|_{[0,1]} \quad \text{''}$$

$$\alpha^{-1}(a) \in \tau_e|_{[0,1]}$$

Dunque possiamo costruire α così:

$$\alpha(t) := \begin{cases} a & \text{per } t \in [0,1) \\ b & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

α è un arco tra a e b.

Dunque X è connesso per archi perché è prodotto di connessi per archi

(b) I è compatto per Heine-Borel perchè è chiuso e limitato.

Y è compatto perchè è uno spazio di cardinalità finita (dunque tutti i suoi possibili ricoprimenti sono finiti)

Dunque X è compatto perchè è prodotto di compatti

(c) Per studiare le proprietà di separazione di X guardo quelle di I ed Y, perchè so che uno spazio prodotto di due spazi è T_i se e solo se lo sono i due fattori per $i=0,1,2$.

$(I, \tau_{e|I})$ è T_2 perchè è metrizzabile

(Y, τ_Y) è T_0: infatti dati $a \neq b$ $\exists\, \mathcal{U} = \{a\}$ aperto tale che $a \in \mathcal{U}$ e $b \notin \mathcal{U}$

non è T_1: $\{a\}$ non è chiuso perchè $\{b\}$ non è aperto.

dunque Y non è neanche T_2 perchè $T_2 \Rightarrow T_1$

Quindi $X = I \times Y$ è T_0, non è T_1 nè T_2.

(d) Qual' è il gruppo fondamentale di X?

(So da (a) che è connesso per archi quindi la scelta del punto base non cambia la classe di isomorfismo del gruppo.)

prendo $x_0 = (0, a) \in X$

Vale che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(I, 0) \times \pi_1(Y, a)$

I è contraibile, quindi $\pi_1(I, 0) \cong \{[\varepsilon_0]\}$.

Quindi $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, a)$

Ora verifico che anche Y è contraibile

Considero $r: Y \longrightarrow \{a\}$ verifico che è una retrazione forte di deformazione. Sia $i: \{a\} \hookrightarrow Y$

$$r \circ i : Y \longrightarrow Y$$
$$a \longmapsto a$$
$$b \longmapsto a$$

Costruisco una omotopia tra $r \circ i$ e id_Y

$$R: Y \times I \longrightarrow Y$$

$$R(y, t) := \begin{cases} a & \text{se } t \in [0, 1) \\ y & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

L'unica cosa da controllare è che R sia continua

$R^{-1}(Y) = Y \times I \quad R^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad R^{-1}(a) = (Y \times [0,1)) \cup (\{a\} \times \{1\})$
$= \underbrace{(\{a\} \times I)}_{\text{aperto}} \cup \underbrace{(Y \times [0,1))}_{\text{aperto}}$

Quindi R è la ~~retrazione~~ omotopia che cercavo (ed è relativa ad $\{a\}$). Dunque $\pi_1(X, x_0) \cong \{[\varepsilon_{x_0}]\}$.