Soluzioni esercizi di Natale 2017 - 2018

Corso di Geometria 1, Lidia Stoppino

1) (a) X spazio topologico con la proprietà che $\forall Y$ sp. top $\forall f: X \to Y$, f è continua.

Voglio dimostrare che X ha la topologia discreta

In particolare, se prendo $Y = X$ e $\tau_Y = \mathcal{D}$ e $f = id_X$

Abbiamo che $id_X : (X, \tau_X) \to (X, \mathcal{D})$

è continua. Cioè $\forall S \subseteq X$

$$S = id_X^{-1}(S) \in \tau_X$$

Dunque $\tau_X \supseteq \mathcal{D} \Rightarrow \tau_X = \mathcal{D}$

(b) Y tale che per ogni altro spazio X e per ogni $f: X \to Y$, f è continua.

voglio vedere che la topologia su Y è per forza quella concreta:

prendo in particolare $X = Y$ e $\mathcal{C}$ top. concreta su X

Prendo $f = id_Y$

Allora $id_Y : (Y, \mathcal{C}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ è continua.

Quindi $\forall U \in \tau_Y$ $\quad \underbrace{id_Y^{-1}(U)}_{U} = \begin{cases} Y \\ \emptyset \end{cases} \Rightarrow \tau_Y = \mathcal{C}$

2) $X = (0, 1]$ $\quad Y = [0, 1]$ in $\mathbb{R}$

Trovare parte interna e chiusura

Ricordiamo che dato $S \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathring{S} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq S}} A$$ il più grande aperto contenuto in S

$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq S}} C$$ il più piccolo chiuso contenente S

Ricordiamo inoltre che $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto sse $A = \mathring{A}$

$C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso sse $C = \overline{C}$

con te

- X non è né aperto né chiuso
- $(0, 1)$ è aperto e $X \setminus \{1\} = (0, 1)$

Dunque $\mathring{X} = (0, 1)$

- $[0, 1]$ è chiuso e $[0, 1] = X \cup \{0\}$

Dunque $\overline{X} = [0, 1]$

Inoltre $(0, 1) = Y \setminus \{0, 1\}$

e $Y \setminus \{0\} = (0, 1]$ $\quad Y \setminus \{1\} = [0, 1)$

non sono aperti. Quindi $\mathring{Y} = (0, 1)$

Y è chiuso: $\overline{Y} = Y$

$\mathcal{D}$ top. discreta

Dato qualunque spazio $(X, \mathcal{D})$ discreto, $S \subseteq X$ S è sia aperto che chiuso, quindi $S = \mathring{S} = \overline{S}$.

Quindi $X = \mathring{X} = \overline{X}$ $\quad Y = \mathring{Y} = \overline{Y}$

$\mathcal{C}$ top. concreta

$\mathring{X} = \emptyset = \mathring{Y}$ (la parte interna di qualunque sottoinsieme proprio è sempre $\emptyset$)

$\overline{X} = \overline{Y} = \mathbb{R}$

$\mathcal{K}$ top. cofinita

$\mathcal{K} = \{ Y \subseteq \mathbb{R} \mid |\mathbb{R} \setminus Y| < +\infty \} \cup \{\emptyset\}$

chiusi in $\mathcal{K}$: insiemi finiti e $\mathbb{R}$ stesso.

aperti in $\mathcal{K}$: complementari di insiemi finiti e $\emptyset$

dunque

$\mathring{X} = \emptyset$ perchè nessun aperto proprio è contenuto in X, siccome $|\mathbb{R} \setminus X| = +\infty$

$\overline{X} = \mathbb{R}$ perchè nessun chiuso proprio contiene X, poichè $|X| = +\infty$

stesso ragionamento per Y:

$\mathring{Y} = \emptyset$, $\overline{Y} = \mathbb{R}$

$\underline{\tau_-}$ topologia della semicontinuità superiore

$$\tau_- = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \phi\}$$

$\mathring{X} = \phi$ perché nessun aperto proprio è contenuto in X

$\overline{X} = [0, +\infty)$ infatti questo è un chiuso che contiene X e dato qualunque C chiuso che contiene X $C = \begin{cases} \mathbb{R} \\ [c, +\infty), \end{cases}$ con $c \leq 0$

quindi $[0, +\infty)$ soddisfa la proprietà che definisce la chiusura. Allo stesso modo $\mathring{Y} = \phi$ e $\overline{Y} = [0, +\infty)$

$\underline{\tau_S}$ topologia della retta di Sorgenfrey:

topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base

$$\{[a, b), a < b\}$$

$(0, 1]$ non è aperto per τ_S. Infatti, se per assurdo lo fosse, avrei che $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $[1, 1+\varepsilon) \subseteq (0, 1]$ assurdo.

$(0, 1)$ è aperto per τ_S. Infatti, possiamo ricordare che $\tau_S \supsetneq \tau_e \ni (0, 1)$

o anche verificare direttamente che

$$(0, 1) = \bigcup_{n=}^{\infty} [1/n, 1) \in \tau_S$$

Dunque, come nel primo punto, $\mathring{X} = (0, 1)$

5

$[0,1]$ non è chiuso per τ_s. Infatti;

$\mathbb{R} \setminus (0,1] = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ non è aperto

(se lo fosse avrei che $\exists\, \varepsilon > 0$ tc $[0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus (0,1]$)
falso

D'altra parte $[0,1]$ è chiuso per τ_e
dunque lo è per τ_s

(direttamente: $\mathbb{R} \setminus [0,1] =$

$= (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, 0) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} [1 + \frac{1}{n}, 1+n) \in \tau_s$)

Dunque $\overline{X} = [0,1]$

Per quanto riguarda Y,

$\mathring{Y} = [1, 0)$ perché $[1, 0)$ è aperto

e $[1,0) = Y \setminus \{0\}$

e Y stesso non è aperto.

$\overline{Y} = Y$ perché, come osservato sopra,

Y è chiuso.

(b) Stabilire se X e Y sono connessi / compatti / separabili rispetto a ciascuna delle topologie elencate.

τ_e. Su $(\mathbb{R}, \tau_e)$ abbiamo teoremi:

- i connessi sono tutti e soli gli intervalli
- i compatti sono tutti e soli i chiusi e limitati.

Dunque X e Y sono connessi, X non è compatto e Y lo è.

$\mathbb{Q} \cap X$ e $\mathbb{Q} \cap Y$ sono sottoinsiemi densi (lo sono in $\mathbb{R}$) e numerabili (sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$) di X e Y rispettivamente. Dunque X e Y sono entrambi separabili

$\mathcal{D}$. nessuno spazio discreto con più di un elemento è connesso, dunque X e Y non sono connessi con $\mathcal{D}|X$ e $\mathcal{D}|Y$

Inoltre con $\mathcal{D}|X$ $\{\{x\}, x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti

Dunque $(X, \mathcal{D}_{X})$ non è compatto.

Anche $(Y, \mathcal{D}_{|Y})$ non è compatto

(posso prendere $\{\{y\}, y \in Y\}$ come ricoprimento aperto.)

Inoltre osserviamo che con $\mathcal{D}_{|X}$ e $\mathcal{D}_{|Y}$

vale che $\forall S \subseteq X \quad \overline{S} = S$ e $\forall T \subseteq Y \quad \overline{T} = T$

dunque l'unico sottospazio denso in X (risp. Y) è X (risp. Y)

Siccome né X né Y sono numerabili,

$(X, \mathcal{D}_{|X})$ e $(Y, \mathcal{D}_{|Y})$ non sono separabili.

<u>c)</u> In questo caso le osservazioni da fare sono:

- uno spazio con la topologia concreta è connesso;
- uno spazio con la topologia concreta è compatto;
- qualunque sottoinsieme di uno spazio concreto è denso, quindi uno spazio concreto è sempre separabile.

Dunque X e Y sono connessi, compatti e separabili con la topologia indotta da $\mathcal{C}$

$K_|$ topologia cofinita.

La topologia indotta da K su X e Y è la topologia cofinita.

Dato uno spazio Z con topologia cofinita

- Osserviamo che se Z è infinito allora non è connesso: se $U \subsetneq Z$ è un suo aperto proprio allora $Z \setminus U$ è finito e dunque U non è chiuso.
- Inoltre Z è sempre compatto: dato $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di Z, se $A \in \mathcal{A}$ è un aperto proprio allora $Z \setminus A$ è finito

Diciamo $Z \setminus A = \{z_1, \dots, z_n\}$ per certi z_i, $n \in \mathbb{N}$. Allora $\exists\, A_i \in \mathcal{A}$ tali che $z_i \in A_i$ (perché $\mathcal{A}$ è un ricoprimento) e quindi $\{A, A_1, \dots, A_n\}$ è un sottoricoprimento aperto di Z.

Dunque X e Y sono sconnessi e compatti con la topologia indotta da K

Verifichiamo che sono separabili:

$\mathbb{Q} \cap X$ e $\mathbb{Q} \cap Y$ sono sottoinsiemi numerabili di X ed Y, e la loro chiusura è X e Y. Infatti $\overline{\mathbb{Q}} \underset{\text{con } K}{=} \mathbb{R}$ e vale che

$$\overline{X \cap \mathbb{Q}}^{X} = X \cap \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = X$$

$$\overline{Y \cap \mathbb{Q}}^{Y} = Y \cap \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = Y$$

$\underline{\tau_-}$ topologia della semicontinuità superiore.

Gli Aperti di X ~~sono~~ le restrizioni ad X di aperti di τ_- dunque

$$\tau_-|_X = \{ X, \emptyset, (a, a), a \leq 1 \}$$

nessun aperto proprio è chiuso, quindi X è connesso. lo stesso ragionamento vale per Y.

Sia $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X
Allora $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che $1 \in A$.
Ma dalla descrizione sopra vediamo che allora $A = (0, 1]$. Dunque $\{A\}$ è sottoricoprimento finito di X e X è compatto. lo stesso ragionamento vale per Y.

$\overline{\mathbb{Q} \cap X} = X$ e $\overline{\mathbb{Q} \cap Y} = Y$

dunque sia X che Y sono separabili.

τ_S

- Verifichiamo più in generale che $(\mathbb{R}, \tau_S)$ è totalmente disconnesso: sia $S \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme con almeno due elementi $x, y \in S$, $x \neq y$
allora $$S = \big((-\infty, y) \cap S\big) \cup \big([y, +\infty) \cap S\big)$$ diciamo $x < y$
dunque S è sconnesso.
Quindi sia X che Y sono sconnessi.

- prendiamo $$A = \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N} > 0} \cup \{1\}$$
questo è un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti.
Allo stesso modo
$$A' = \left\{ \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{1\}$$
è un ricoprimento aperto di Y che non ammette sottoricoprimenti finiti.
Dunque X e Y sono sconnessi in questo caso.

- Osserviamo che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ con τ_S, dunque anche X e Y sono separabili.

3) $A = \{3k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$

$B = \{3k+2,\ k \in \mathbb{N}\}$

τ topologia su $\mathbb{N}$ generata da

$\{A, B, C\}$ $\quad C = \{3k,\ k \in \mathbb{N}\}$

Dunque

$\tau = \{A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, \emptyset, \mathbb{N}\}$

a) Chiaramente τ non è T1: i punti non sono chiusi: ad esempio

$\overline{\{1\}} = A$

Dunque $(\mathbb{N}, \tau)$ non è neanche T2, poichè T2 $\Rightarrow$ T1.

b) Esiste un sotto spazio infinito di $\mathbb{N}$ che è compatto? Sì:

Osserviamo che $(\mathbb{N}, \tau)$ è compatto, perchè ha un numero finito di aperti (quindi ogni ricoprimento aperto è già finito).

c) Si discuta la continuità delle funzioni: (12)

$$f, g : (\mathbb{N}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{N}, \tau)$$

così definite: $f(x) = x+1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$g(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

continua sse la controimmagine di aperti è aperta. Dunque vediamo se f e g sono continue:

$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 \in A\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 = 3k+1 \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$

$= 3\mathbb{N} = C \in \tau$

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 \in B\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 = 3k+2 \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\} =$

$= A \in \tau$

$f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 = 3k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid [x]_3 = 2\} = B \in \tau$

f è continua

$g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 3k+1 \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$

$= \emptyset \in \tau$

$g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 3k+2 \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\} =$

$= \emptyset \in \tau$

$g^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 3k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\} =$

$= \mathbb{N} \in \tau \implies$ g è continua

4) $X = [-1, 1]$

$\tau = \{ U \subseteq X \mid 0 \notin U$ oppure $U \supseteq (-1,1) \}$

(a) I ovvio

II Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia di aperti di τ

$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in ? \tau$ sì: infatti, o $0 \notin \bigcup_\alpha U_\alpha$

oppure, se $0 \in \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\exists \bar\alpha \in A$ tale che $0 \in U_{\bar\alpha}$,

quindi $(-1,1) \subseteq U_{\bar\alpha} \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. ok

III Siano $U, V \in \tau$. Verifico che $U \cap V \in \tau$

Se $0 \notin U \cap V$ allora ok $U \cap V \in \tau$

Se $0 \in U \cap V$ allora $0 \in U \Rightarrow (-1,1) \subseteq U$

e $0 \in V \Rightarrow (-1,1) \subseteq V$

quindi $(-1,1) \subseteq U \cap V$ ok

b) No, X non è T2: infatti ogni aperto che contiene 0 contiene anche $(-1,1)$ per definizione.

c) $A \subseteq X$ aperto se $0 \notin A$ oppure $(-1,1) \subseteq A$

$A \subseteq X$ chiuso se $0 \notin X \setminus A$ oppure $(-1,1) \subseteq X \setminus A$

cioè $0 \in A$

$A \subseteq X \setminus (-1,1) = \{-1, 1\}$

Ad esempio -1 è sia aperto che chiuso (ed è proprio): X è sconnesso.

d) Sì, X è compatto.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X allora sia $U \in \mathcal{A}$ tale che $0 \in U$. Allora $(-1,1) \subseteq U$

D'altra parte $\exists\, W, V \in \mathcal{A}$ tali che $1 \in W$ e $-1 \in V$

Dunque $\{U, W, V\}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$

e) $X \setminus \{0\}$ è compatto? No.

osserviamo che i punti $p \in X \setminus \{0\}$ sono tutti aperti per la topologia di X, quindi $\tau|_{X \setminus \{0\}}$ è la topologia discreta.

poiché $X \setminus \{0\}$ è uno spazio infinito, e discreto, non è compatto.

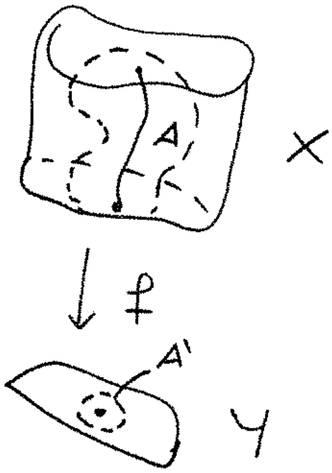
5) Sia $f : X \to Y$ applicazione continua chiusa e suriettiva tale che $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ è compatto. Si dimostri che se X è a base numerabile, allora anche Y lo è.

Una base per la topologia di Y corrisponde ad una famiglia di aperti saturi di X tale che ogni aperto saturo di X è unione di elementi della famiglia.

Usiamo un ragionamento simile a quello usato il 20 dicembre per dimostrare che nelle stesse ipotesi se Y è compatto allora X lo è.

$\forall A \subseteq X$ aperto considero

$$A' := \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \}$$



A' è aperto in Y, infatti

$$Y \setminus A' = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \nsubseteq A \} =$$

$$= \{ y \in Y \mid \exists x \in f^{-1}(y) \text{ con } x \notin A \} =$$

$$= \underbrace{f(\underbrace{X \setminus A}_{\text{chiuso}})}$$

chiuso in Y perché f è chiusa.

Data una base $\mathcal{B}$ numerabile per X sarebbe bello che l'insieme $\{ B', B \in \mathcal{B} \}$ fosse una base per Y. Questo non è vero in generale (pensate a dei controesempi: ad esempio se prendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x$ e prendo $\{ B_{1/n}(q_1, q_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ $B' = \emptyset$)

Però posso (come nel teorema del 20 dicembre) considerare

$$\mathcal{F} := \{ \text{unioni finite di elementi di } \mathcal{B} \}$$

Verifichiamo che

$$\mathcal{B}' := \{ A' \mid A \in \mathcal{F} \} \text{ è una base per } Y$$

usando il lemma della base.

1) sia $y \in Y$. Voglio vedere che

$\exists A' \in \mathcal{B}'$ con $y \in A'$.

$\exists \{B_\alpha\} \subseteq \mathcal{B}$ tali che $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_\alpha B_\alpha$.

poichè per ipotesi $f^{-1}(y)$ è compatto, $\exists \alpha_1, .., \alpha_k$

tali che $f^{-1}(y) \subseteq B_{\alpha_1} \cup .. \cup B_{\alpha_k} \in \mathcal{F}$

dunque $y \in (B_{\alpha_1} \cup .. \cup B_{\alpha_k})' \in \mathcal{B}'$.

2) Osserviamo che dati A, E aperti in X

ho che $A' \cap E' = (A \cap E)'$

$$\{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \text{ e } f^{-1}(y) \subseteq E \} = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \cap E \}$$

dunque, Dati $A', E' \in \mathcal{B}'$

$$A' \cap E' = (A \cap E)'$$

sia ora $y \in (A \cap E)'$. Abbiamo che

$f^{-1}(y) \subseteq A \cap E$ aperto in X

Siano ora $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ elementi di $\mathcal{B}$ tali che
(I insieme)

$$f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq A\cap E$$

(esistono perché $\mathcal{B}$ è una base)

Poiché $f^{-1}(y)$ è compatto, $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_k$ tali che

$$f^{-1}(y) \subseteq \underbrace{B_{\alpha_1}\cup\dots\cup B_{\alpha_k}}_{\in\,\mathcal{F}} \subseteq A\cap E$$

dunque

$$y \in \underbrace{(B_{\alpha_1}\cup\dots\cup B_{\alpha_k})'}_{\in\,\mathcal{B}'} \subseteq (A\cap E)'$$

Dunque $\mathcal{B}'$ è una base, ed essendo di cardinalità $\leq |\mathcal{F}|$, è numerabile.

Per il controesempio che mostra la necessità che le fibre siano compatte, basta considerare l'esempio che abbiamo fatto a lezione di spazio non 1-numerabile (quindi non 2-numerabile):

$$\underset{\displaystyle X}{\overset{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}{\shortparallel}} \leftarrow \text{contrazione ad un punto del sottoinsieme } \mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$$

L'applicazione quoziente

$$\pi: \mathbb{R} \longrightarrow X$$

è continua, chiusa (perchè contraggo un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$), $\mathbb{R}$ è 2-numerabile, ma X non lo è.

Infatti, la fibra su $P = [\mathbb{Z}] \in X$ è $\pi^{-1}(P) = \mathbb{Z}$ che non è compatto in $\mathbb{R}$.