

Soluzioni scritto del 20 settembre 2018

1) vero o falso:

(a) VERO: Sia $(X, \mathcal{D}_X)$ uno spazio discreto e sia $(\mathcal{D}_X = \mathcal{P}(X))$ sia $Y \subseteq X$ qualunque sottoinsieme.

$\forall Z \subseteq Y, Z \in \mathcal{D}_X \Rightarrow Z \in \mathcal{D}_{X|Y}$ topologia indotta da $\mathcal{D}_X$ su Y

$\Rightarrow \mathcal{D}_{X|Y} = \mathcal{D}_Y = \mathcal{P}(Y)$

(b) vero: ~~consideriamo lo spazio discreto~~

Posto $X := \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \}$

verifico che

$\mathcal{T}_e|_X = \mathcal{D}_X$



$\forall n \in \mathbb{N}^+$ se prendo $(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) = U_n \in \mathcal{T}_e$

$U_n \cap X = \{ \frac{1}{n} \}$. Dunque X è discreto.

(c) vero

Dimostriamo:

Sia X spazio topologico, compatto. Sia $K \subseteq X$ K chiuso e discreto.

Supponiamo per assurdo che $|K| = +\infty$

Per ipotesi: $\forall k \in K \exists U_k \in \mathcal{T}_X$ tali che $U_k \cap K = \{k\}$

Consideriamo il ricoprimento aperto di X

$\mathcal{A} := \{ U_k, k \in K \} \cup \{ X \setminus K \}$

$\rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_X$ perché $U_k \in \mathcal{T}_X \forall k \in K$ e $X \setminus K \in \mathcal{T}_X$ perché K è chiuso per ipotesi

$\rightarrow \mathcal{A}$ è un ricoprimento; infatti

$\bigcup_{k \in K} U_k \supseteq K$ per ipotesi, e dunque $(X \setminus K) \cup \bigcup_{k \in K} U_k = X$

Ora dimostriamo che A non possiede sottoricoprimenti finiti: sia $\{A_i\}_{i=1, \dots, n} \subseteq A$ un sottoinsieme finito.

poiché $|K| = +\infty$ per ipotesi e $\forall A_i$ esiste al più un $k \in K$ tale che $k \in A_i$, deve esistere $\bar{k} \in K$ tale che $\bar{k} \notin A_i$ per nessun $i=1, \dots, n$. Dunque

$$\bar{k} \notin \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \{A_i\} \text{ non è un sottoricoprimento.}$$

(d) Falso: $(0,1) \subseteq [0,1]$ $(0,1)$ non è compatto con la topologia euclidea
 $[0,1]$ è compatto " " "

Entrambe le affermazioni seguono dal teorema di Heine-Borel: un sottospazio di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

(e) VERO Un insieme finito è sempre compatto in qualunque topologia.

Sia $F \subseteq X$ $|F| < +\infty$, X spazio topologico qualsiasi.

comunque $\tau_X|_F \subseteq \mathcal{P}(F)$ e $\mathcal{P}(F)$ l'insieme delle parti di F è un insieme finito, quindi qualunque ricoprimento (aperto) è finito, quindi $(F, \tau_X|_F)$ è compatto.

2) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tra spazi topologici (X, τ_X) (Y, τ_Y)

(a) La topologia quoziente è la topologia definita con:

$$f_* \tau_X = \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X \}$$

(verifica topologia... appunto!)

(b) Supponiamo che $f_* \tau_X = \tau_Y$

osserviamo che i chiusi per questa topologia sono $C \subseteq Y$ tali che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X

Ricordiamo che Y è T_1 se i punti di Y sono chiusi.

Sia dunque $y \in Y$

y è chiuso per $\tau_Y = f_* \tau_X$ sse $f^{-1}(y)$ è chiuso in X

$f^{-1}(y)$ è la fibra di y rispetto ad f .

(c) f continua e aperta $\Rightarrow T_Y = f_* T_X$

f continua $\Rightarrow \forall U \in T_Y \quad f^{-1}(U) \in T_X$, dunque $T_Y \subseteq f_* T_X$
per definizione
 (in fatti $f_* T_X$ si può anche

definire come la meno fine delle topologie su Y che rendono f continua)

D'altra parte, sia $W \in f_* T_X$. Abbiamo che $f^{-1}(W) \in T_X$
 per definizione. Siccome f è aperta $\Rightarrow f(f^{-1}(W)) \in T_Y$

$W \xleftarrow{\parallel} f$ suriettiva

Dunque $f_* T_X \subseteq T_Y$.

In conclusione $f_* T_X = T_Y$ come volevamo.

(d) un'applicazione quoziente è sempre aperta? No

Come controesempio consideriamo l'applicazione

$$e: [0, 1] \longrightarrow S^1$$

$$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

si tratta di un'applicazione quoziente (ad esempio si

può vedere osservando che e è continua, suriettiva e chiusa)

ma prendiamo $e([0, 1/2)) =$ semiarco in S^1 che non è
aperto in $[0, 1]$ aperto



3 X, Y spazi topologici $x_0 \in X, y_0 \in Y$

(a) Ricordiamo che in generale, dato Z spazio topologico e $z_0 \in Z$

$$\pi_1(Z, z_0) = \frac{\{\text{lacci in } Z \text{ con punto base } z_0\}}{\sim}$$

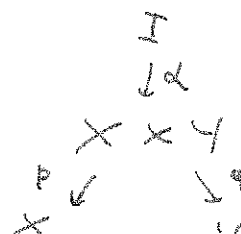
equivalenza di cammini

(b) sia dunque

$$\alpha: I \longrightarrow X \times Y \quad \text{laccio con punto base } (x_0, y_0)$$

allora possiamo considerare $p \circ \alpha = \alpha_x: I \longrightarrow X$ e $q \circ \alpha = \alpha_y: I \longrightarrow Y$

dove p e q sono le proiezioni sui due fattori



Consideriamo i due omeomorfismi indotti dalle proiezioni 14

$$p_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[\alpha] \longmapsto [\alpha_x] = [p \circ \alpha]$$

$$q_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$[\alpha] \longmapsto [\alpha_y] = [q \circ \alpha]$$

Abbiamo un omeomorfismo indotto

$$\varphi := (p_* \times q_*): \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Vediamo che si tratta di un isomorfismo:

$$\rightarrow \forall ([\gamma], [\delta]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

considero $\alpha(t) := (\gamma(t), \delta(t))$ che è un loop su $X \times Y$ con punto base (x_0, y_0)

$$\text{e } \varphi([\alpha]) = ([\gamma], [\delta])$$

$$\text{perciò } p \circ \alpha = \gamma \text{ e } q \circ \alpha = \delta$$

Dunque φ è suriettivo.

$$\rightarrow \ker \varphi = \{[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \mid ([\alpha_x], [\alpha_y]) = ([\varepsilon_x], [\varepsilon_y])\}$$

se $\exists F_x: I^2 \rightarrow X$ equivalente tra α_x e ε_{x_0}
di cammini

ed $\exists F_y: I^2 \rightarrow Y$ " " α_y e ε_{y_0}

allora $F(s, t) := (F_x(s, t), F_y(s, t))$ è una equivalenza in

$X \times Y$ tra α e $\varepsilon_{(x_0, y_0)}$. Dunque $\ker \varphi = \{[\varepsilon_{(x_0, y_0)}]\}$

$\Rightarrow \varphi$ è iniettivo

(b) $X \times Y$ è semplicemente connesso sse X e Y lo sono.

Ricordiamo che uno spazio topologico Z si dice semplicemente connesso se è connesso per archi (cpa) e $\pi_1(Z, z_0) = \{[E_{z_0}]\}$ per uno (e dunque ogni) $z_0 \in Z$.

Se $X \times Y$ è connesso per archi allora X e Y lo sono:

Dati $x_0, x_1 \in X$ e $y_0, y_1 \in Y$ prendo un arco α in $X \times Y$ tra (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , $\alpha_x = p \circ \alpha$ è arco in X tra x_0 e x_1 , $q \circ \alpha = \alpha_y$ è arco in Y tra y_0 e y_1 .

Se $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \{[E_{(x_0, y_0)}]\}$ allora

$\pi_1(X, x_0) = \{[E_{x_0}]\}$ e $\pi_1(Y, y_0) = \{[E_{y_0}]\}$ per il punto (b)

infatti se $\pi_1(X, x_0) \neq \{[E_{x_0}]\}$ avrei che

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \neq \{[E_{(x_0, y_0)}]\}$

e lo stesso per Y .

Dunque

$X \times Y$ semplicemente connesso $\Rightarrow X$ e Y sempl. connessi

D'altra parte se X e Y sono cpa, dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$

prendo γ cammino in X tra x_0 e x_1

e " " Y tra y_0 e y_1

e allora $\alpha(t) = (\gamma(t), \delta(t))$ è cammino in $X \times Y$ tra (x_0, y_0) e (x_1, y_1)

Quindi se $\pi_1(X, x_0) = \{[E_{x_0}]\}$ e $\pi_1(Y, y_0) = \{[E_{y_0}]\}$

allora $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \{[E_{(x_0, y_0)}]\}$ per il punto (b).

(g) Sia $n \in \mathbb{N}^+$.

Usando l'induzione, dal punto (b) ho che

se $X_1, \dots, X_n$ sono spazi topologici

e $x_i \in X_i \forall i=1, \dots, n$, vale che

$$\pi_1(X_1 \times \dots \times X_n, (x_1, \dots, x_n)) \cong \prod_{i=1}^n \pi_1(X_i, x_i)$$

Dimostriamo la formula

Sia vera $\forall k < n$ (passo induttivo)

allora $\pi_1(X_1 \times \dots \times X_n, (x_1, \dots, x_n)) =$

$$= \pi_1((X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n, (x_1, \dots, x_n)) \cong$$

$$\cong \pi_1(X_1 \times \dots \times X_{n-1}, (x_1, \dots, x_{n-1})) \times \pi_1(X_n, x_n) \quad \begin{matrix} \text{formula} \\ \uparrow \\ \text{per } k=2 \end{matrix} \quad \text{ok!}$$

Per $n=2$ (base induttiva) è la formula di (b).

Quindi per rispondere alle domande basta prendere uno spazio con $\pi_1(X, x) \cong \mathbb{Z}$.

Prendiamo $X = S^1$

$$\pi_1((S^1)^m, (1, \dots, 1)) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{m \text{ volte}} = \mathbb{Z}^m$$