Soluzioni del compito di Geometria 1 del 12 luglio 2018

1) vero o falso

1(a) un'applicazione biiettiva tra spazi topologici è sempre un omeomorfismo

1(b) un'applicazione biiettiva e aperta tra sp. top. è sempre un omeomorfismo.

Entrambi i punti sono <u>FALSI</u> un controesempio per entrambi è dato da

$$id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$$

è un'applicazione biiettiva e aperta ma <u>non</u> è un omeomorfismo: infatti non è continua

ad esempio prendo $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ $\{0\} \in \mathcal{D}$ ma

$id_{\mathbb{R}}^{-1}(\{0\}) = \{0\} \notin \mathcal{E}$

(in effetti $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$ è continua sse $\tau_2 \subseteq \tau_1$)

1(c) un'applicazione biiettiva tra spazi topologici è aperta sse è chiusa. <u>VERO</u>

sia $\varphi : X \longrightarrow Y$ biiettiva e aperta $\left(\text{cioè } \forall\, \mathcal{U} \in \tau_X \Rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \in \tau_Y\right)$

sia $C \subseteq X$ chiuso:

$X \setminus C \in \tau_X$ $\qquad \varphi(X \setminus C) \overset{\varphi \text{ iniettiva}}{=} \varphi(X) \setminus \varphi(C) = \underset{\varphi \text{ suriettiva}}{=} Y \setminus \varphi(C)$

Dunque per ipotesi $\varphi(X \setminus C) \in \tau_Y \Rightarrow \varphi(C)$ è chiuso.

Il viceversa è analogo: sia φ biiettiva e chiusa. Sia $\mathcal{U} \in \tau_X$

$\left.\begin{array}{l}\varphi(X \setminus \mathcal{U}) = \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{U}) = Y \setminus \varphi(\mathcal{U}) \\ \text{chiuso per ipotesi}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathcal{U})$ <u>aperto</u>

1 (d) Un'applicazione continua da un compatto a un T2 è chiusa: <u>VERO</u>

Ricordiamo che valgono le seguenti proposizioni:

(*) un chiuso in un compatto è compatto.

(**) un compatto in uno spazio T2 è chiuso.

Sia $f: X \to Y$ continua con X compatto, Y T2

sia $C \subseteq X$ un chiuso.

Per (*) C è compatto.

Allora $f(C)$ è compatto perchè l'immagine tramite continua di compatto è compatto.

Per (**) abbiamo dunque che $f(C)$ è chiuso in Y, come volevamo.

1 (e) Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio T2 è sempre <u>aperta</u>.

<u>Falso</u>: Prendiamo come controesempio l'inclusione

$I = [0,1] \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

I è compatto, $\mathbb{R}$ è T2, i è continua

Se prendo ad esempio I stesso è aperto in I

ma $i(I) = I$ non è aperto in $\mathbb{R}$.

2) $\tau = \{ Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{Z} = \emptyset \} \cup \{\mathbb{R}\}$

(a) τ è una topologia su $\mathbb{R}$: verifichiamo che soddisfa le proprietà di una topologia

(I) $\emptyset \cap \mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$;
$\mathbb{R} \in \tau$ per definizione.

(II) Sia $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia di elementi di τ

$\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \overset{?}{\in} \tau$? Se $\exists \bar{\alpha} \in A$ tale che $\mathcal{U}_{\bar{\alpha}} = \mathbb{R}$ allora $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = \mathbb{R}$. Supponiamo non esista tale $\bar{\alpha}$.

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \right) \cap \mathbb{Z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{distributiva}}}{=} \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathbb{Z}) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{U}_\alpha \in \tau}}{=} \bigcup_{\alpha \in A} \emptyset = \emptyset \quad \boxed{\text{Ok}}$$

(III) Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$. Vale che $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$?
se $\mathcal{U}$ o $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ allora $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \underset{\in \tau}{\mathcal{V}}$ o $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \underset{\in \tau}{\mathcal{U}}$

Altrimenti, $(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap \mathbb{Z} = (\mathcal{U} \cap \mathbb{Z}) \cap (\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}) = \emptyset$

Osservo che in questa topologia anche l'intersezione arbitraria di aperti è aperta.

2 d) Qual'è la chiusura dell'insieme $(0,2)$ in $(\mathbb{R},\tau)$?

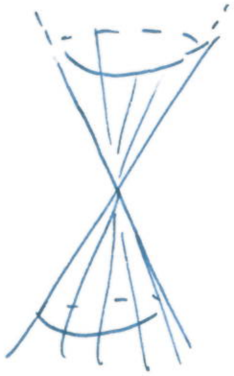
Ricordiamo che la chiusura di un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ rispetto a τ è il più piccolo chiuso (rispetto all'inclusione) che contiene S.

I chiusi di τ sono gli insiemi C tali che $\mathbb{R} \setminus C$ è aperto cioè $\mathbb{Z} \cap (\mathbb{R} \setminus C) = \phi$ (e $C = \phi$)
quindi sono $C \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\mathbb{Z} \subseteq C$ (e $C = \phi$)
Dunque $(0,2) \cup \mathbb{Z} = [0,2] \cup \{n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,2\}\} = C$ è chiuso, ed è contenuto in qualunque chiuso che contenga $(0,2)$: è la sua chiusura. $C = \overline{(0,2)}$

Qual'è la parte interna di $(0,2)$
Ricordiamo che la parte interna è il più grande aperto di τ contenuto in $(0,2)$
consideriamo $A = (0,1) \cup (1,2) \subseteq (0,2)$
è aperto perchè $A \cap \mathbb{Z} = \phi$
inoltre $(0,2) = A \cup \{1\}$ non è aperto.
Qualunque aperto di τ contenuto in $(0,2)$ è per forza contenuto in $A \Rightarrow A = \mathring{(0,2)}$

3) $X = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$

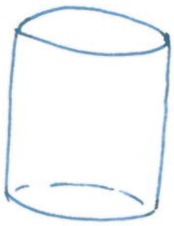
cono con vertice $(0,0,0)$



$Y = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z\in[-1,1]\}$

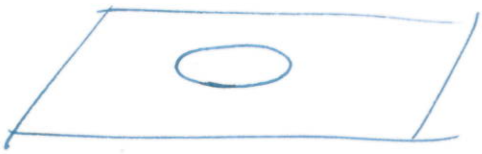
cilindro.

Notiamo che $Y \sim S^1\times[0,1]$



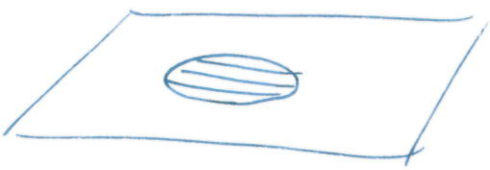
$Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$

circonferenza contenuta nel piano $\pi:(z=0)$



$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ z=0\}$

disco unitario nel piano $\pi:(z=0)$



$W: \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

sfera di raggio 1 e centro $(0,0,0)$

3.a) compattezza.

Il teorema di Heine-Borel ci dice che un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

X non è limitato ($\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists p \in X$ con $z_p = z$) dunque non è compatto.

Tutti i sottospazi sono descritti come luogo di zeri di funzioni continue o come luoghi $\{\underline{x} \mid g(\underline{x}) \geq 0\}$ e questi rappresentano sempre chiusi in $\mathbb{R}^n$

Y, Z, V e W sono tutti contenuti nel cubo $[-1,1]^3$ in $\mathbb{R}^3$, dunque sono limitati.

Y, Z, V e W sono pertanto compatti.

3 b) connessione.

Ricordiamo che connessione per archi $\Rightarrow$ connessione

X è stellato: $\forall\, p \in X$ il segmento tra p e $\underline{O}$ è tutto contenuto in X

infatti sia $P = (x_p, y_p, z_p)$ tali che $x_p^2 + y_p^2 = z_p^2$

se considero $t \in [0,1]$ (tx_p, ty_p, tz_p) soddisfa

$$(tx_p)^2 + (ty_p)^2 = (t\,z_p)^2$$

$$t^2(x_p^2 + y_p^2) = t^2 z_p^2$$

Y è connesso per archi, essendo omeomorfo al prodotto di due spazi connessi per archi.

$Z \sim S^1$ cpa

V è convesso $\Rightarrow$ connesso

la sfera W è connessa per archi.

3c) Suddividere gli spazi in classi di omeomorfismo
Faccio prima la suddivisione in classi di equivalenza omotopica, per usare il fatto che se X e Y sono omeomorfi allora sono omot. equivalenti
(quindi se $X \not\simeq Y \Rightarrow X \not\cong Y$)

3d) come osservato nel (3b), X è stellato, dunque è contraibile (ovvero omotopicamente equivalente ad un punto)
Anche il disco V è contraibile (essendo convesso) quindi $X \simeq \{pt\} \simeq V$

D'altra parte, osserviamo che $Z \sim S^1$ e che Y si retrae forte di deformazione su Z: un'omotopia che descrive la retrazione è:

$$R: Y \times I \longrightarrow Y$$
$$R(\underline{y}, t) := (y_1, y_2, t y_3)$$

Dunque $Z \simeq Y$. Inoltre $\pi_1(Z, z_0) \cong \pi_1(Y, y_0) \cong \mathbb{Z}$ $\forall z_0 \in Z, \forall y_0 \in Y$
W è semplicemente connesso (usando Van Kampen) ma non è contraibile

Dunque

$$\pi_1(W, w_0) \cong \{[\varepsilon_{w_0}]\} \not\cong \pi_1(Y, y_0)$$

quindi $W \not\simeq Y$

D'altra parte W non è contraibile quindi $W \not\simeq X$

Resta da osservare che $X \not\simeq Y$ perché i gruppi fondamentali non sono isomorfi..

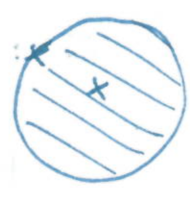
Le classi di equivalenza omotopica sono dunque

$$\{X, V\} \quad \{Y, Z\} \quad \{W\}$$

3c) Dunque, le classi di omeomorfismo sono una sottopartizione delle classi di equivalenza omotopica.

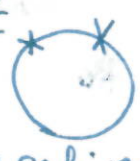
Per stabilirle devo solo capire se $X \sim V$ e se $Y \sim Z$

Se tolgo $O = (0,0,0)$ ad X ottengo due componenti connesse ($X \cap \{z>0\}$ e $X \cap \{z<0\}$) mentre qualunque punto io tolga da V ottengo ancora uno spazio connesso per archi, dunque connesso.



Quindi $X \not\sim V$

Se tolgo qualunque coppia di punti da Y ottengo ancora uno spazio cpa, mentre se tolgo due punti da $S^1 = Z$ ottengo due componenti connesse $\Rightarrow Y \not\sim Z$



Le classi di omeomorfismo sono $\{X\}\ \{Y\}\ \{Z\}\ \{V\}\ \{W\}$ ■