

6 dicembre 2017

(2)

Risposta a "di quanti pezzi è fatto uno spazio?"

$\mathbb{R}$ ————— $\mathbb{R}$ "1 pezzo" =

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ———— $\mathbb{R}$ "2 pezzi"

$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ———— $\mathbb{R}$ "3 pezzi"

def: X spazio topologico $C \subseteq X$ si dice

componente connessa di X se

1. C è connesso

2. se A è un connesso di X tale che $C \subseteq A$

$\Rightarrow C = A$

Un'altra parola st'iamo dicendo che se prendo

$\left\{ \begin{array}{c} \text{sotto spazi} \\ \text{connessi di } X \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow C(x) = A$$

③

PROP L'insieme delle componenti connesse di X
forma una partizione di X

dim sappiamo che $\forall x \in X \exists C(x)$ comp. connessa
che lo contiene.

D'altra parte se C_i e C' sono
componenti connesse di X vale che

$$C = C'$$

$$\text{oppure } C \cap C' = \emptyset$$

Infatti,

se $C \cap C' \neq \emptyset \Rightarrow C \cup C'$ è connesso
come $\exists$ che contiene C e C'

$\Rightarrow C \cup C' = C$ e $C \cup C' = C'$ pu. def di comp.
connessa

$$\Rightarrow C = C' (= C \cup C')$$

□

④

Quindi X è unione disgiunta delle sue componenti connesse.

ES $\rightarrow \mathbb{R}$ ha 1 comp. connesa

$\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ha $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ come comp. connesse:

infatti, per es. $(-\infty, 0) = C$ è connesa (è intervallo)

e se $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è connesa $\forall C \quad A \supseteq C$

ovvero che in questo caso C è aperto e chiuso in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

A connesa $\begin{cases} \text{sempre} \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \subseteq C \\ A \cap C = \emptyset \text{ non vale} \\ \text{perché } \underline{A \supseteq C} \end{cases}$

$$C = \underbrace{(-\infty, 0]}_{\text{chiuso in } \mathbb{R}} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow A \subseteq C \subseteq A \Rightarrow A = C$$

→ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad (-\infty, 0) \quad (0, 1) \quad e \quad (1, +\infty)$

sono le sue (3) componenti connesse

→ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ quali sono le sue componenti connesse?

se $S \subseteq \mathbb{Q}$ con almeno 2 punti $x < y$

$$\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ t.c. } x < r < y \Rightarrow S = ((-\infty, r) \cap S) \cup ((r, +\infty) \cap S)$$

$\Rightarrow S$ è sconnesso

($\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso)

Quindi

$$\{\text{connessi in } \mathbb{Q}\} = \{\text{punti di } \mathbb{Q}\}$$

ogni punto di $\mathbb{Q}$ è dunque massimale per l'inclusione.

Infatti, se A è connesso che contiene un punto $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow A = \{x\}$$

Quindi le componenti connesse di A sono i punti.

⑥

Prop. le componenti connesse di uno spazio X sono sempre chiuse

dim Sia C componente connessa.

In particolare C è connessa $\Rightarrow \overline{C}$ è connessa

↓
ultimo
lemma 3

$\overline{C}$ è un connesso che contiene C

$\Rightarrow C = \overline{C} \Rightarrow C$ è chiuso.

OSS.

$\rightarrow$ è falsa l'affermazione: se $A \subseteq X$ è connesso
allora $\overset{\circ}{A}$ è connessa



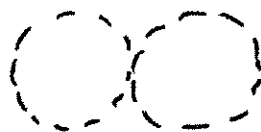
per esempio siano D_1, D_2 dischi in $\mathbb{R}^2$

con $D_1 \cap D_2 = 1 \text{ punto}$

$Y = D_1 \cup D_2$ è connessa

$$\overset{\circ}{Y} = \overset{\circ}{D}_1 \cup \overset{\circ}{D}_2$$

aperti non
molti



$$\underline{\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset}$$

$\Rightarrow \underline{\overset{\circ}{Y} \text{ è sconnessa}}$

→ Inoltre le comp. connesse non sono necessariamente aperte: i punti in A non sono infatti aperti.

→ oss se X ha un numero finito di componenti connesse allora si che sono anche aperte:

$$X = C_1 \cup \dots \cup C_n$$

C_i sono componenti
connesse

(8)

$$C_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j$$

unione finita di chius.
quindi chiusa

$$X \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j \text{ è } \underline{\text{aperto}}$$

Questo è il caso di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{\text{insieme finito di punti}\}$

Potro det allo stesso modo le componenti connesse per archi: sotto spazi massimali delle famiglie dei connenti per archi di X

ES₁: Su X spazio topologico posso definire

$x \sim y \iff x$ e y sono estremi di
un cammino in X

verificare che è rel. di equivalenza.



Le classi di equivalenza di $\sim$ sono
esattamente le componenti connesse per archi!

Attenzione le componenti cpa non sono necessariamente chiuse

Esercizi

70

1) $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ famiglia di sottospazi connessi di
uno spazio topologico X

$$\text{t.c. } \exists p \in X \text{ t.c. } p \in Z_\alpha \quad \forall \alpha \in I$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha \text{ è connesso}$$

dim Sia A aperto e chiuso non vuoto in $Z = \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha$

Penso supporre, a meno di passare al complementare,
che $p \in A$

Allora $\forall \alpha \in I \quad Z_\alpha \cap A \ni p$ ed è aperto e chiuso
in Z_α

$$\Rightarrow Z_\alpha \cap A = Z_\alpha \Rightarrow Z_\alpha \subseteq A \quad \forall \alpha \in I$$

$$\Rightarrow Z = \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha \subseteq A \quad \Rightarrow Z = A$$

Ricominciamo

X sp top. $C \subseteq X$ chiuso

$U \supseteq C$ $U \setminus C$ connesso
aperta e X connesso

Voglio: $X \setminus C$ è connesso:

Per assurdo $X \setminus C = A \cup B$ aperti disgiunti non mol.
in $X \setminus C$

$\Rightarrow A$ e B sono aperti disgiunti e non mol. in X

$U \setminus C \subseteq A \cup B$ ed è connesso

quindi $U \setminus C \subseteq A$ oppure $U \setminus C \subseteq B$

supp. pu finire le idee $U \setminus C \subseteq A$

$$\Rightarrow A \cup C \supseteq (U \setminus C) \cup C = U$$

ora $\boxed{A \cup C = U \cup A}$

$$U \subseteq A \cup C \quad \text{OK} \quad A \subseteq A \cup C$$

$$U \cup A \subseteq A \cup C \quad \text{chiamo}$$

D'altra parte $C \subseteq U$ per ipotesi

$$\Rightarrow A \cup C \subseteq A \cup U$$

$$e \quad \underbrace{U \cap B} = \emptyset \quad \text{perché} \quad X \setminus C = A \cup B$$

$$e \quad U \setminus C \subseteq A$$

analogi:

$$X = (A \cup C) \cup B = (\underbrace{U \cup A}_{\text{a perche}}) \cup \underbrace{B}$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ (X \setminus C) \cup C & (A \cup B) \cup C \end{matrix}$$

$$e \quad (U \cap A) \cap B = \emptyset$$

$\Rightarrow$ Assunto perché X è per ipotesi conneso $\square$