ES X, Y, Z sp. topologici

$$f : X \longrightarrow Y \qquad g : X \longrightarrow Z \qquad \underbrace{(f \times g)}_{=\psi} : X \longrightarrow Y \times Z, \quad x \longmapsto (f(x), g(x))$$

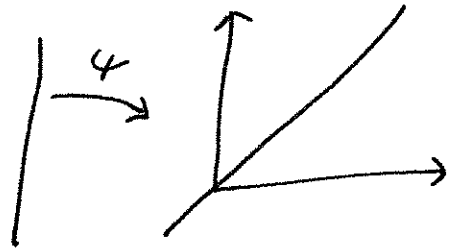
sappiamo: ψ continua sse f e g continue

se f, g sono aperte ψ è aperta?

Faccio esempi per capire: $X \xrightarrow[id_X]{} X \qquad f, g = id_X$

$$X \xrightarrow{\psi} X \times X \quad \text{è appl. continua} \qquad \psi \text{ è iniettiva}$$
$$x \longmapsto (x, x)$$

$X = (\mathbb{R}, \tau_e) \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (x, x)$



$$\psi(\mathbb{R}) = \underbrace{\Delta}_{\text{diagonale}} := \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$$ che non è aperto in $\mathbb{R}^2$

Allora la risposta è **no**!

OSS: a) se invece considero l'applicazione

$$\varphi = f \times g : X \times X \longrightarrow Y \times Z$$
$$(x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

verificate che qui vale che se f, g sono aperte, φ lo è.

b) $\Delta \subseteq X \times X$ tra poco ci torniamo!

ES: $X \xrightarrow{\psi} \Delta \subseteq X \times X$
$x \longmapsto (x, x)$

ψ è una immersione?
(so che ψ è continua e iniettiva.
rimane da verificare
$\psi : X \longrightarrow \Delta$ è aperta)

Secondo punto esercizio:

$\psi : X \to Y \times Z$ è chiusa se f e g sono chiuse?

il controesempio di prima non funziona (in generale) prendiamo $\underset{id_{\mathbb{R}}}{\overset{\shortparallel}{f}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g =$ costante

$\exists\, \bar{y} \in \mathbb{R}$ tc $g(x) = \bar{y}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\psi(\mathbb{R}) = \{ (f(x), g(x)),\ x \in \mathbb{R} \} = \{ (x, \bar{y}),\ x \in \mathbb{R} \}$$

NON funziona! è ancora un chiuso di $\mathbb{R}^2$!

Provate a cosa!

ES. se considero $\varphi : X \times X \to Y \times Z$

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

In questo caso NON vale che

f, g chiuso $\Rightarrow \varphi$ chiuso

cercate un controesempio

ES. $S \subseteq X \quad T \subseteq Y \qquad X, Y$ sp. topologici

Dimostrare che $\quad \bar{S} \times \bar{T} = \overline{S \times T}$

Spazi di Hausdorff: proprietà

X sp. top è $T2$ se
$\forall x, y \in X,\ x \neq y,$
$\exists \underset{\substack{\cup\\ x}}{\mathcal{U}}, \underset{\substack{\cup\\ y}}{\mathcal{V}}$ aperti tc $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Lemma: X ~~sia~~ spazio di Hausdorff

1. Ogni sottospazio di X è di Hausdorff
2. se Y è $T2 \Rightarrow X \times Y$ è $T2$

dim: 1. $Z \subseteq X$ sottoinsieme

voglio: $(Z, \tau_{X|Z})$ sia $T2$.

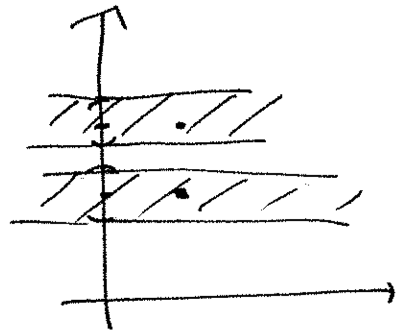
prendo $z, w \in Z$ con $z \neq w$ $\quad \exists \mathcal{U}, \mathcal{V}$ in X aperti
($Z \subseteq X$)
tali che $z \in \mathcal{U}$, $w \in \mathcal{V}$
e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$
perché X è $T2$

Prendo $\mathcal{U} \cap Z$ e $\mathcal{V} \cap Z$: sono i due aperti che cerco in $\tau_{X|Z}$.

2. X e Y T2. Prendo $p, q \in X \times Y$, $\underline{p \neq q}$.

$p = (x, y)$ $q = (x', y')$ $x \neq x'$ oppure $y \neq y'$

Supponiamo $x \neq x'$



siccome X è T2 $\exists\, \underset{\underset{x}{\cup}}{\mathcal{U}}, \underset{\underset{x'}{\cup}}{\mathcal{U}'}$ aperti

$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$

Considero $\mathcal{U} \times Y$ e $\mathcal{U}' \times Y$

sono aperti in $X \times Y$ $\quad (\mathcal{U} \times Y) \cap (\mathcal{U}' \times Y) = \underbrace{(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')}_{\emptyset} \times Y = \emptyset$

$p \in \mathcal{U} \times Y$ $\quad q \in \mathcal{U}' \times Y$

$\Rightarrow$ <u>ok</u>

<u>Lemma</u> Se X è omeomorfo a Y

Allora X è T2 $\Leftrightarrow$ Y è T2

verifica per esercizio.

Quindi essere T2 è proprietà costante nelle classi di omeomorfismo di spazi topologici.

Def Una tale proprietà si chiama proprietà topologica

ES di proprietà non topologica:
Nei sottospazi di $\mathbb{R}$ essere limitato non è una proprietà topologica!

visto: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}$

limitato — non limitato!

ES: verificate che $\forall (a,b)$ $a<b$ (a,b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$
anche $(-\infty, b)$ $(a, +\infty)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$ / $\rightsquigarrow$ stanno insieme stessa classe di omeomorfismo

DOMANDE: $[0,1)$ $(0,1]$ $[0,1]$
stanno nella stessa classe di omeomorfismo?

NOTAZIONE X omeomorfo a Y $X \sim Y$

Osservazioni

X spazio $T2$

Ho informazione su coppie di punti distinti

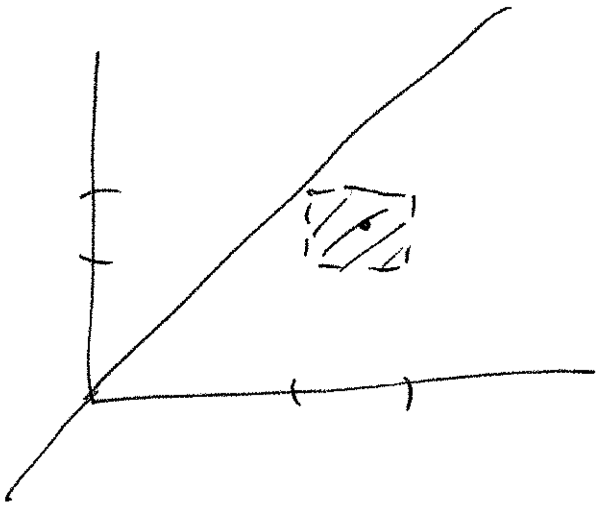
$(x, y) \quad x \neq y$

cioè sul complementare di $\Delta \subseteq X \times X$

$\forall (x, y) \in X \times X \setminus \Delta \quad \exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ aperti tc

$(x, y) \in \underbrace{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} \longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \quad y \in \mathcal{V}$

e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$



$$\boxed{\begin{array}{c} z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \\ \Updownarrow \\ (z, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} \cap \\ \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Updownarrow \\ \Delta \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \ni (z, z) \end{array}$$

Quindi la condizione di essere T2 la posso riscrivere:

$$\forall (x,y) \in X\times X \setminus \Delta \quad \exists \underset{\mathcal{B}_{X\times X}}{\underset{\cap}{U\times V}} \ni (x,y) \quad \text{tc} \quad U\times V \subseteq X\times X\setminus\Delta$$

Abbiamo dimostrato:

<u>Teo</u>: X è T2 se e solo se $\Delta \subseteq X\times X$ è chiusa
(la diagonale è chiusa nel prodotto)

<u>conseguenze importanti</u>

<u>cor</u> $f, g : X \to Y$ applicazioni continue con Y T2

$C := \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ è chiuso in X

<u>dim</u> so che $\Delta \subseteq Y\times Y$ è chiusa

$$\begin{aligned}(f,g) : X &\longrightarrow Y\times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x))\end{aligned}$$

osservazione cruciale:

$$\begin{array}{ccc} C & = & (f,g)^{-1}(\Delta) \\ \| & & \| \\ \multicolumn{3}{c}{\{x\in X \mid (f,g)(x)\in\Delta\}} \end{array}$$

Siamo a posto perché (f,g) è continua

Δ è chiuso in $Y\times Y$

$\Rightarrow$ $(f,g)^{-1}(\Delta)$ è chiuso in X ⊠

In particolare se $Y=\mathbb{R}$ (con T_2!)

X sp. top. qualunque $\quad f : X \to \mathbb{R}$ continua $\{x \mid f(x)=0\}$ è chiuso in X

$g\equiv 0$

<u>cor.</u> $f: X \to Y$ continua con Y T_2

$\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x\in X\} \subseteq X\times Y$ il grafico. Γ_f è <u>chiuso</u> in $X\times Y$.

<u>dim</u>

$$X\times Y \xrightarrow{f\times id_Y} Y\times Y \supseteq \Delta$$
$$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$$

$$(f\times id_Y)^{-1}(\Delta) = \{(x,y) \text{ tc } f(x)=y\} = \Gamma_f$$

$f\times id_Y$ continua $\boxed{\text{ok}}$

ES) Scrivere un esempio di appl. continua tale che il grafico non sia chiuso nel prodotto. (NON dovrà essere T2 lo spazio di arrivo!)

ES) se $f: X \to Y$ $g: Z \to W$ appl continue tra spazi topologici;

$\Rightarrow$ <u>$f \times g$ è continua</u> $f \times g : X \times Z \to Y \times W$

BAsta verificare che $(f \times g)^{-1}(V \times W)$ è aperto in $X \times Z$

$$\forall\, V \times W \in \mathcal{B}_{Y \times W}$$

$$(f \times g)^{-1}(V \times W) = \{ (x,z) \in X \times Z \text{ tc } (f(x), g(z)) \in V \times W \} =$$

$$= \{ (x,z) \in X \times Z \text{ tc } f(x) \in V \text{ e } g(z) \in W \} =$$

$$= f^{-1}(V) \times g^{-1}(W)$$

f, g continue $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) \in \tau_X$ $g^{-1}(W) \in \tau_Z$ quindi

$$f^{-1}(V) \times g^{-1}(W) \in \tau_{X \times Z}$$

☒