

8 novembre 2017

①

(X, d_x) (Y, d_y) spazi metrici

Posso def. metrica prodotto su $X \times Y$

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) := \max \{ d_x(x, x'), d_y(y, y') \}$$

Analogamente a $d_{\max}$ in $\mathbb{R}^2$ si verifica che $d_{X \times Y}$ è metrica
(Fatele!)

come sono fatte le bolle per $d_{X \times Y}$?

$$\begin{aligned} B_r^{d_{X \times Y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= \{ (x, y) \in X \times Y \mid d_{X \times Y}((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) < r \} = \\ &= \{ (x, y) \in X \times Y \mid d_x(x, \bar{x}) < r \text{ e } d_y(y, \bar{y}) < r \} \\ &= B_r^{d_x}(\bar{x}) \times B_r^{d_y}(\bar{y}) \end{aligned}$$

sono il prodotto di Bolle nei due spazi!

Gia' visto in corso: metrica del max su $\mathbb{R}^n$

che è equivalente a quelle euclidea.

(2)

Dobbiamo verificare che

la topologia indotta dalla metrica prodotto $T_{d_{X \times Y}}$

sia la topologia prodotto delle

di $(X, T_{d_X}) \times (Y, T_{d_Y})$

Appena visto: una base per $T_{d_{X \times Y}}$ è data dal prodotto
delle bolle B

$B \subseteq B_{X \times Y}$ perché le bolle sono aperte

"
 $\downarrow \{U \times V \mid U \in T_{d_X}, V \in T_{d_Y}\}$

In generale $\subsetneq$

Ma so che $\forall U \in T_{d_X}$ U è unione di bolle in (X, d_X)

$\forall V \in \mathcal{T}_Y$ V è unione di bolle in (Y, d_Y)

$$M = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}^{d_X} \text{ bolle in } (X, d_X) \quad V = \bigcup_{\beta} B_{\beta}^{d_Y} \text{ bolle in } (Y, d_Y)$$

$$M \times V = \left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}^{d_X} \right) \times \left(\bigcup_{\beta} B_{\beta}^{d_Y} \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (B_{\alpha}^{d_X} \times B_{\beta}^{d_Y})$$

$\Rightarrow$ la topologia indotta da $B \times U \subseteq \text{top. indotta da } B$

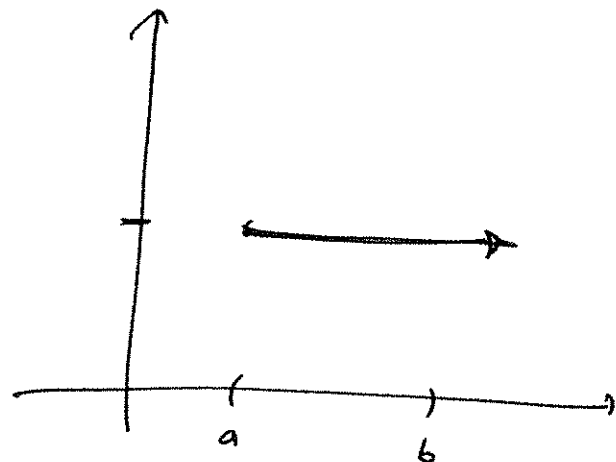
$\Rightarrow$ le topologie coincidono!

Oss la topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ indotta da $(\mathbb{R}, \tau_e)$ su tutti i fattori è la topologia euclidea.

Oss su $\mathbb{R}^2$ top prodotto $(\mathbb{R}, \tau_e) \times (\mathbb{R}, \tau_e)$ come è fatto?

Base canonica : $\{ U \times S, U \in \tau_e, S \subseteq \mathbb{R} \}$
qualeunque $\swarrow$ ($S \in \mathcal{O}$)

(4)



Ad esempio,

$(a, b) \times \{y\}$ è aperto $\forall y \in \mathbb{R}$
 $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}$

$$\underline{ES)} \quad (X, \mathcal{O}) \times (Y, \mathcal{O}) = (X \times Y, \mathcal{O})$$

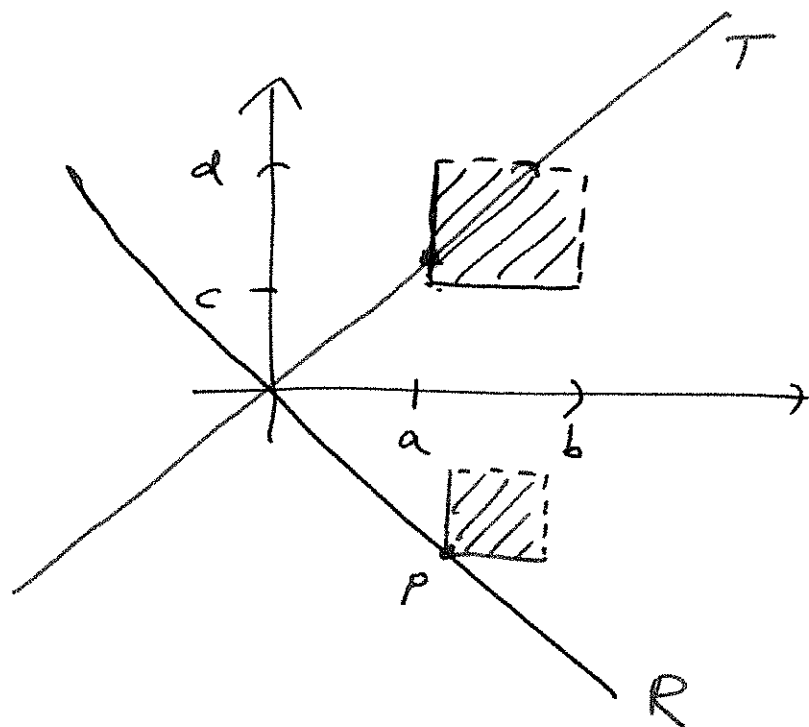
ES) $(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S) = \mathbb{R}^2$ con top. prodotto
 indotta da τ_S su entrambi
 i fattori τ_S^2 top.
 prodotto

τ_S ha $\{[a, b), a < b\}$ che è una base.

vale che: $\{[a, b) \times [c, d), a < b, c < d\}$ è base per τ_S^2
 (vedere prossimo esercizio)

verificare che la topologia indotta sul sottospazio $X = -Y$

$$R = \{(x, y) \mid x = -y\} = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$$



⑤
 è la topologia di discreta,
 mentre la topologia
 indotta su $T = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 è τ_S

Verifichiamo che:

$$(\mathbb{R}, \tau_S^2|_R) = (\mathbb{R}, \mathcal{D})$$

Per vedere questo,

verifichiamo che ogni punto $p = (x, -x)$ di R è
 aperto per $\tau_S^2|_R$ prendendo $\varepsilon > 0$

$$[x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon) \in \tau_S^2$$

$$[x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon) \cap R = \{(x, -x)\} \quad \underline{\text{ok}}$$

D'altra parte per T : $P = (x, x) \in T$

se facciamo

$$[x, x+\varepsilon) \times [x, x+\varepsilon) \cap T =$$

$$= \mathbb{R} \times [x, x+\varepsilon) \cap T$$

voglio verificare che:

$$P|_T : (T, \tau_{S/T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_S) \text{ è omeomorfismo}$$

FATTO: verificare che
gli insiemi della forma $(\mathbb{R} \times [a, b)) \cap T$ sono base

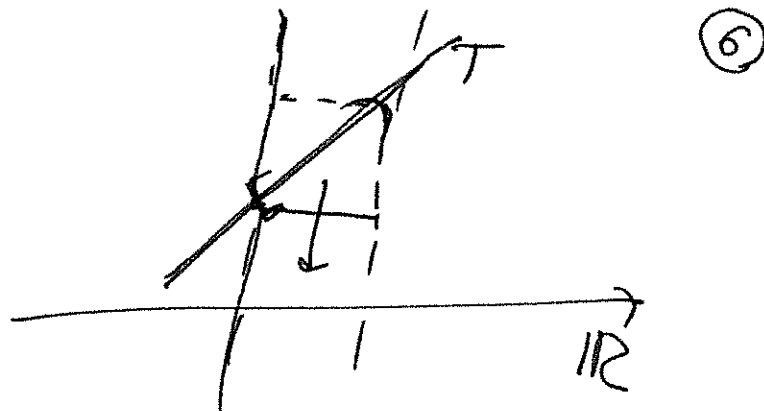
per $\tau_{S/T}$

$$P((\mathbb{R} \times [a, b)) \cap T) = [a, b)$$

$\circ P|_T$ è biethiva

$\rightarrow P|_T$ è aperta e continua

$\sim P|_T$ è omeomorfismo



⑥

