CONNESSIONE

def X spazio topologico si dice connesso se gli unici suoi sottoinsiemi sia aperti sia chiusi sono X e $\emptyset$. X non connesso si dice sconnesso

lemma

Sono equivalenti:

1) X è sconnesso;

2) $\exists$ A, B aperti non vuoti tali che $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$

3) $\exists$ C, D chiusi non vuoti tali che $X = C \cup D$ con $C \cap D = \emptyset$

dim:

(1) $\Rightarrow$ (2) ②

X sconnesso : $\exists\ \emptyset \neq E \subsetneq X$ tale che E è sia aperto sia chiuso.

Allora $X = E \cup (X \setminus E)$

E è aperto non vuoto

$X \setminus E$ è aperto perché E è chiuso

non è vuoto perché $E \subsetneq X$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$X = A \cup B$ unione disgiunta con A, B aperti non vuoti;

$A = X \setminus B$ e B aperto $\Rightarrow$ A è chiuso.

$B = X \setminus A$ " A " $\Rightarrow$ B " " .

(3) $\Rightarrow$ (1) $\exists\ C, D$ chiusi tali che $C \cup D = X$

non vuoti

e $C \cap D = \emptyset$

Allora $\emptyset \neq C \subsetneq X$ e $C = X \setminus D$ aperto

perchè $D \neq \emptyset$

C è sottoinsieme proprio sia aperto sia chiuso.

<u>def</u> $Y \subseteq X$ X spazio topologico Y si dice <u>connesso</u>

se $(Y, \tau_{X|Y})$ è conn<u>esso</u>

<u>ES</u>

1) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (con τ_e)

è sconnesso!

$(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ sono aperti disgiunti

la cui unione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(-\infty, 0) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \underbrace{(0, +\infty)}_{\text{aperto}} \rightarrow$ è <u>chiuso</u>

Se $d = 0 \Rightarrow 0 \in C \cap D$ <u>ok</u>

Altrimenti $d > 0$ $d = \inf D \Rightarrow \nexists\, x \in D, x < d$

$$[0, d) \subseteq [0,1] \setminus D \subseteq C$$

$$\Downarrow$$

$$D \cup C = [0,1]$$

$$[0, d) \subseteq C \Rightarrow \underbrace{\overline{[0, d)}}_{= [0,d]} \subseteq \overline{C} = C$$

C chiuso

$\Rightarrow$ in particolare $d \in C \Rightarrow d \in C \cap D$

Riassumendo $C \cap D \neq \emptyset$.

(*) <u>lemma</u> $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente

$\inf S \in \mathbb{R}$

Verifichiamo che $\inf S \in \overline{S}$

$\inf S$ $=$ i) $\lambda \in \mathbb{R}$ tc $\forall x \in S$ $\lambda \leq x$ $\Longrightarrow$ minorante

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{x} \in S$ tc ~~...~~ $\lambda + \varepsilon \geq \bar{x}$ | è il massimo dei minoranti:

$s := \inf S$

voglio vedere $s \in \overline{S}$ cioè $\forall\, U$ intorno di s
$U \cap S \neq \emptyset$

sia U un tale intorno

$\exists \varepsilon > 0$ tc $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq U$

$\boxed{\text{dato } 0 < \varepsilon' < \varepsilon}$

la proprietà (ii) di s ci dice che $\exists\, \bar{x} \in S$

tc $s-\varepsilon' < s \leq \bar{x} \leq s+\varepsilon' < s+\varepsilon$

e la (i) dice

$\Rightarrow$ $\bar{x} \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq U$
e $\bar{x} \in S$ $\Rightarrow$ $\boxed{U \cap S \neq \emptyset}$

Quindi $(-\infty, 0)$ è proprio sia aperto sia chiuso!

$\underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{chiuso}} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{\text{chiuso}}$ $\rightsquigarrow$ sconnessione con proprietà (3)

Teo $[0, 1]$ è connesso. $\boxed{([0, 1], \tau_{e|[0,1]})}$

dim Siano C, D due chiusi non vuoti di $[0, 1]$

tali che $[0, 1] = C \cup D$

Se dimostro che $C \cap D \neq \emptyset$ ho dimostrato la connessione di $[0, 1]$.

Non è limitativo supporre che $0 \in C$

Sia $d = \inf D$ $\qquad \underset{\text{chiuso}}{D} \subseteq [0, 1]$

$\Rightarrow d \in D$ perché D è chiuso (*)

Stesso discorso per $\sup S$ purchè S sia limitato superiormente

ESEMPI

- $(X, \mathcal{D})$ è sempre sconnesso non appena $|X| > 1$ (non è il singoletto)
  tutti i suoi sottoinsiemi sono sia aperti sia chiusi

- $(X, \mathcal{C})$ è sempre connesso.

- $(X, \mathcal{K})$ $\quad$ $\mathcal{K}$ topologia cofinita
  Quando esiste un aperto proprio che sia anche chiuso?
  Aperti propri: complementari di sottoinsiemi finiti di X.
  chiusi propri: sottoinsiemi finiti di X.

$\Rightarrow$ $\exists$ aperto e chiuso proprio sse $|X| < +\infty$ e $|X| > 1$

in questo caso $(X, \mathcal{K}) = (X, \mathcal{D})$

Se $|X| = +\infty$ allora $(X, \mathcal{K})$ è connesso!

- $(\mathbb{R}, \tau_-)$ o τ_+ fare per esercizio.

- $(\mathbb{R}, \tau_S)$ osserviamo $[a, +\infty) \in \tau_S$

$$[a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a, a+n) \quad \in \text{base standard}$$

Allora $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$

$(-\infty, 0) \in \tau_e \subsetneq \tau_S \qquad [0, +\infty) \in \tau_S$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_S)$ è sconnesso!

Possiamo dire di più:

$\forall\, S \subseteq \mathbb{R}$ con $|S| > 1$

S è sconnesso.

Infatti fisso $x, y \in S$ $\quad x < y$

$$\underset{\ni\, x}{\big((-\infty, y) \cap S\big)} \cup \underset{\ni\, y}{\big([y, +\infty) \cap S\big)} = S$$

$\Rightarrow$ S è sconnesso

Questa proprietà si chiama "essere totalmente sconnesso"

(X, τ_X) tale che $\forall\, S \subseteq X$ con $|S| > 1$

S è sconnesso

Ad esempio $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ con τ_e

è sconnesso ma non totalmente sconnesso!

$[1, 2] \subseteq X$ abbiamo appena visto che è

connesso -

<u>Teo</u> "immagine tramite continua di un connesso è connessa"

$X \xrightarrow{f} Y$ applicazione continua suriettiva, X, Y sp. top.

se X è connesso $\Rightarrow$ Y è connesso

<u>Cor</u> • quindi quozienti di connessi sono connessi

• $X \xrightarrow{f} Y$ continua $\Rightarrow$ $f(X)$ è connessa.

(l'unica cosa da osservare è che
$f: X \longrightarrow f(X)$ è continua e suriettiva
$ \cap$
$ Y$ con $f(X)$ con topologia di sottospazio data da Y)

<u>dim</u> : Nelle condizioni del teorema

Dimostriamo che se Y è sconnesso allora X è sconnesso.

Y sconnesso $\Leftrightarrow$ $\exists$ A, B aperti non vuoti t.c. $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = Y$

prendo $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ f cont $\Rightarrow$ sono aperti in X

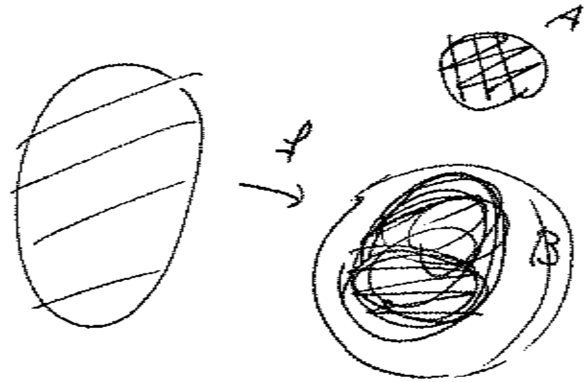
~~finn~~ $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(Y) = X$

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\underset{\overset{\shortparallel}{\emptyset}}{A \cap B}) = \emptyset$$

inoltre

$f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ non sono vuoti

perché f è suriettiva



$\Rightarrow$ X è sconnesso $\boxtimes$

connessione per archi

X spazio topologico

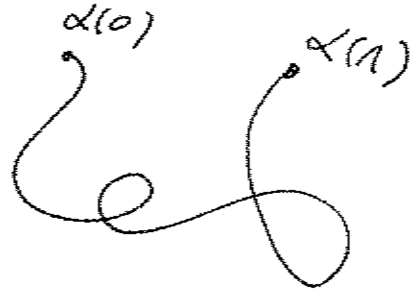
def: un cammino o arco in X è un' applicazione continua

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$$

con $\mathcal{T}_e$

$\alpha(0)$ punto iniziale del cammino

$\alpha(1)$ punto finale " "



se $\alpha \equiv \text{cost} = c_0$ dico che è cammino costante in c_0

def X spazio topologico si dice <u>connesso per archi</u> (cpa) se $\forall x, y \in X$ $\exists \alpha : [0, 1] \to X$ arco con punto iniziale x e punto finale y.

13

<u>Teo</u>, uno spazio X connesso per archi è connesso:

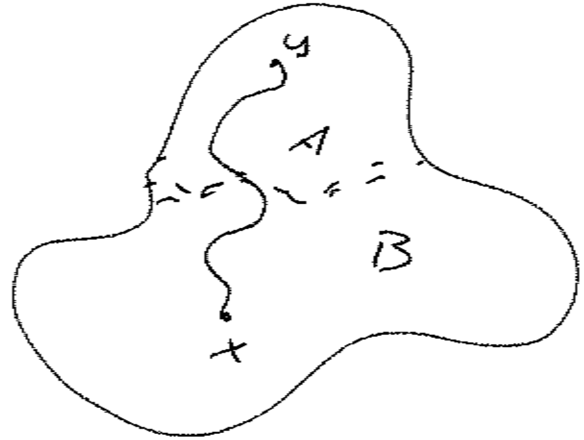
<u>dim</u>: supp PA che X (cpa) sia sconnesso:

$\exists$ Prendiamo A, B aperti non vuoti

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = X$

fisso $x \in A$ e $y \in B$



prendo $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ cammino tra x e y

(di estremi x e y)

$\Updownarrow$

$(\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y)$

$$\alpha([0,1]) = \underbrace{(A \cap \alpha([0,1]))}_{\ni x} \cup \underbrace{(B \cap \alpha([0,1]))}_{\ni y}$$

aperti

$\Rightarrow \alpha([0,1])$ è sconnesso

assurdo: α continua e $[0,1]$ connesso

$\boxtimes$

<u>ES</u>: $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è connesso per archi $\forall n \geq 1$