

visto

29 novembre 2017 ①

G -spazio = spazio topologico con azione sinistra di un gruppo G

Azione sin di $G \iff$ omomorfismo

$$G \xrightarrow{\vartheta} \text{Omeo}(X)$$

gruppo degli
omeomorfismi di X

oss. $\frac{X}{G} = \frac{X}{\text{Im } \vartheta}$ con notazioni qui sopra

infatti $\text{ker } \vartheta = \{g \in G \mid \vartheta(g) = \text{id}_X\}$
 $= \{g \in G \mid g \cdot x = x \ \forall x \in X\}$

$\text{im } \vartheta \cong \frac{G}{\text{ker } \vartheta}$ isomorfismo di gruppi

Per esercizio controllate che le orbite di G e di $\text{int } G$ ②
sono le stesse. Quindi gli spazi quoziente coincidono.

Potremmo parlare direttamente di quozienti per
sottogruppi di $\text{CMEO}(X)$: i.e. Marzetti fa così!

OSS X spazio topologico G gruppo che agisce a sin su X

$$X \xrightarrow{\pi} X/G \quad \text{spazio quoziente}$$

$S \subseteq X$ sottoinsieme qualunque

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(S)) &= \left\{ x \in X \mid \pi(x) \in \pi(S) \right\} = \\ &= \left\{ x \in X \mid \pi(x) = \pi(y) \right. \\ &\quad \left. \text{per qualche } y \in S \right\} = \end{aligned}$$

③

$$= \left\{ x \in X \mid \exists y \in S \exists g \in G \mid x = g \cdot y \right\} =$$

$$= \bigcup_{g \in G} g \cdot S$$

$$g \cdot S = \{ g \cdot y, \quad y \in S \}$$

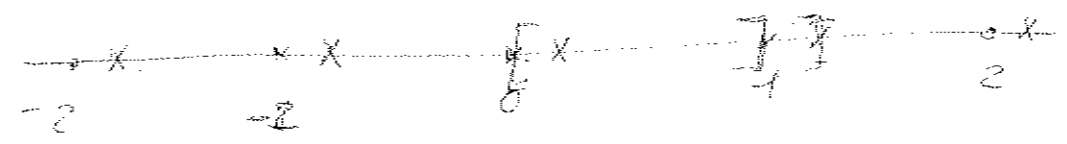
ESEMPIO $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}$ per traslazione

$$\begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \underline{\quad "z \cdot x" := z + x \quad}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z, x) \longmapsto z + x$$

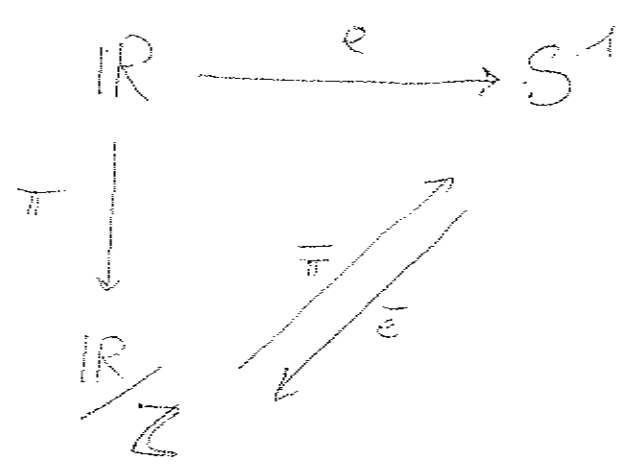
$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com' è fatto?



$\mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1$
 $t \mapsto (cos t, sin t)$

è un'identificazione aperta
 e le fibre sono le stene di π !
 perché e è periodica
 di periodo 1!

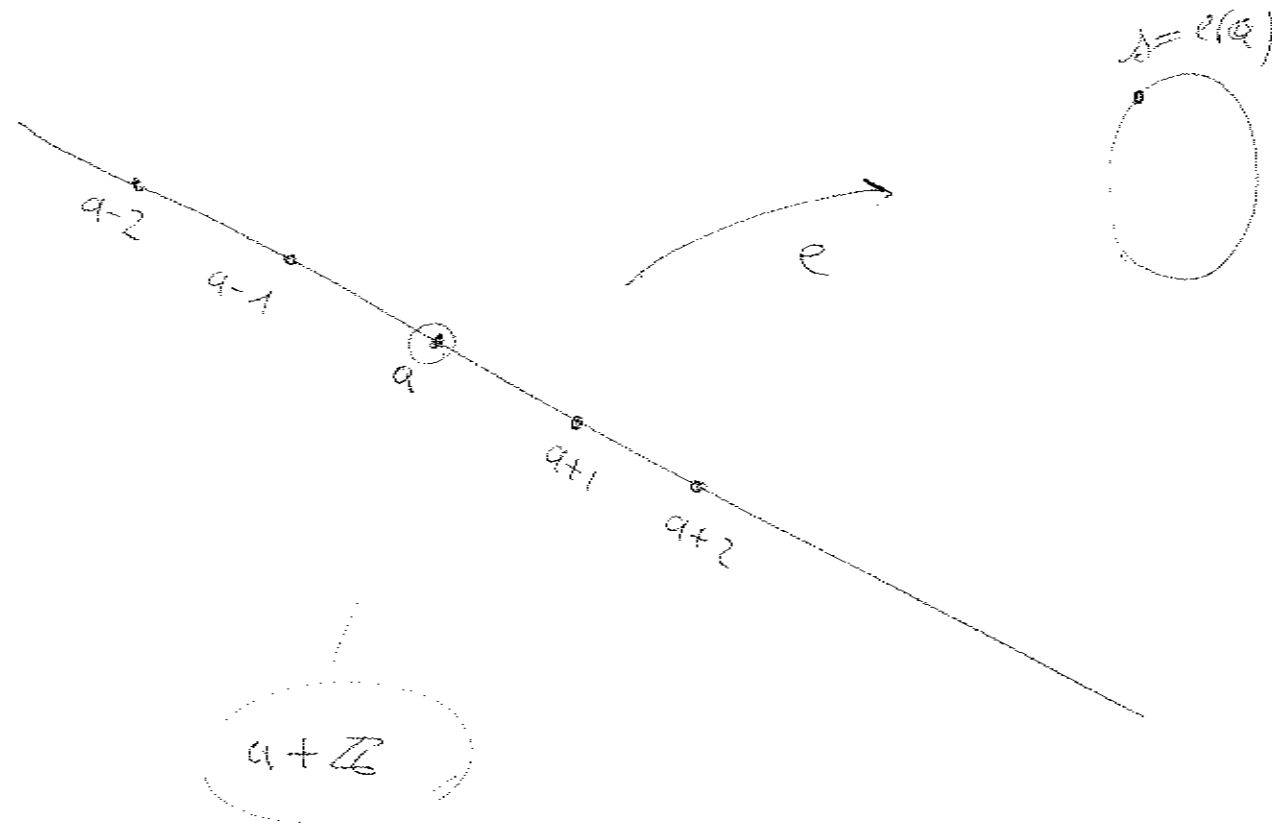
$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$



quindi abbiamo
 ben definite,
 continue $\bar{e}$ e $\bar{\pi}$
 e sono uno l'inversa
 dell'altra!

⑤

Quindi la mappa esponenziale è anche una
mappa quoziente : per l'azione per traslazione di
 $\mathbb{Z}$!



Teo. Sia X uno spazio topologico su cui agisce
un gruppo G . Vale che

⑥

1. $\pi: X \rightarrow X/G$ è aperta;

2. se $|G| < +\infty$ allora π è chiusa.

Dimostrazione:

1) prendo $U \subseteq X$ aperto voglio $\pi(U)$ aperto in X/G

cioè $\pi^{-1}(\pi(U))$ sia aperto in X

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$$

$$\forall g: \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{A}_g} & X \\ x & \mapsto & g \cdot x \end{array} \quad \mathcal{A}_g \text{ è omeomorfismo}$$

allora $\forall g \quad g \cdot U = \mathcal{V}_g(U)$ è aperto!

⑦

$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ è unione di aperti
quindi aperto!

2) $C \subseteq X$ chiuso

$\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso?
||

$\bigcup_{g \in G} g \cdot C$
||

$\bigcup_{g \in G} \mathcal{V}_g(C)$ unione di chiusi
finita $\Rightarrow$ chiuso

⊠

Def

Def
l'azione di un gruppo su un insieme si dice :

8

1) Fedele se $\forall g \neq e$ $\exists x$ t.c. $gx \neq x$
elemento
neutro

equivalentemente:

$$v. \quad G \longrightarrow \text{Aut}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{appl. bijective} \\ \text{do } X \text{ in } \text{set} \end{array} \right\}$$

n è iniettiva

a) libera se $\forall g \neq e \quad \forall x \in X \quad g \cdot x \neq x$

Chiara: libera $\Rightarrow$ fedell

Oss se G agisce liberamente su X

$\Rightarrow G \cdot x \leftrightarrow G$ le orbite sono in biiezione con G

$$G \cdot x = \{ g \cdot x, g \in G \}$$

$$g \cdot x \neq h \cdot x \text{ se } g \neq h$$

⑨

infatti, se avremo:

$$g \cdot x = h \cdot x$$

$\Downarrow$

$$x = e \cdot x = (g^{-1}g) \cdot x = g^{-1}(g \cdot x) = g^{-1}(h \cdot x) = (g^{-1}h) \cdot x$$

$\Downarrow$

$$g^{-1}h = e$$

$\Uparrow$

$$g = h$$

Quindi

$$G \longrightarrow G \cdot x$$

$$g \longmapsto g \cdot x$$

è una applicazione biettiva.

$$x \in X \quad \text{stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} < G \quad (1c)$$

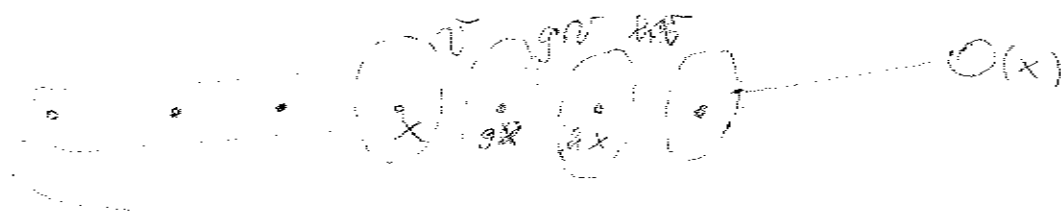
G agisce liberamente su X $(=)$

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Orb}(x) = \mathcal{O}(x) \\ g &\longmapsto gx \\ &\text{è bii e azione.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \text{stab}(x) = \{e\}$$

Sia ora G gruppo che agisce su X spazio topologico
def Dico che l'azione di G è propriamente discontinua
 se $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{V}$ intorno di x

$$\text{tale che } \forall g, g' \in G \text{ con } g \neq g' \quad g\mathcal{V} \cap g'\mathcal{V} = \emptyset$$



OSS un'azione propriamente disc. è libera. (11)

prendo $x \neq g \cdot g' \in G$ con $g \neq g'$ prendo U dato dalla def
 $gx \in gU$ $g'x \in g'U$ e $gU \cap g'U = \emptyset$

$$\Rightarrow gx \neq g'x$$

[ES] Sia G un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio topologico X T_2
Allora l'azione di G è propriamente discontinua]

OSS Quando un quoziente qualunque è T_2 ?

$f: X \longrightarrow Y$ identificazione

Y è T_2 se e solo se $\forall x, y \in X$ con $f(x) \neq f(y)$

esistono due aperti saturi disgiunti che contengono

uno x e l'altro y

(12)

PROP. G gruppo che agisce su X spazio T_2

$\pi: X \longrightarrow X/G$ proiezione al quoziente.

Supponiamo che $\exists A \subseteq X$ aperto tale che

$$1) \forall x \in X \quad \exists g \in G \quad \text{t.c.} \quad g \cdot x \in A$$

(cioè A interseca non banalmente tutte le orbite dell'azione di G)

$$\text{cioè} \quad \pi|_A: A \xrightarrow[\text{suriettivo}]{\quad} X/G \quad \text{ovvero} \quad \pi(A) = \frac{X}{G}$$

$$2) \left\{ g \in G \mid g \cdot A \cap A \neq \emptyset \right\} \text{ è } \underline{\text{finito}}$$

Allora X/G è di Hausdorff.

dim Siano $g_1, \dots, g_m$ tutti gli elementi di G

(13)

talche $g_i A \cap A \neq \emptyset$

Siano $p, q \in X/G$ distinti

Siano $x \in \pi^{-1}(p) \cap A$

$y \in \pi^{-1}(q) \cap A$

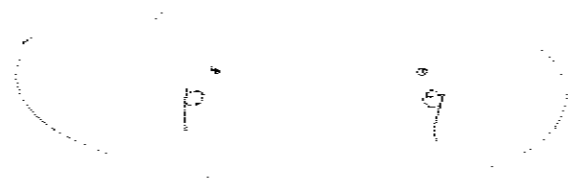
lo pens
fare per
(per A)

Considero $\forall i = 1, \dots, m$

U_i intorno aperto di x

V_i intorno aperto di $g_i y$

disgiunti (Dati delle
proprietà di essere TZ di X)



prende $U = \bigcap_{i=1}^m U_i \ni x$ aperto

(14)

$V = \bigcap_{i=1}^m g_i^{-1} V_i \ni y$
aperto

$V_i \ni g_i y$
 $g_i^{-1} V_i \ni g_i^{-1} g_i y = y$
intersezione aperta di y

voglio vedere che

$\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intornoi aperti disgiunti di p e q

Deve valere che

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} gV$$

devo no essere disgiunti:

$$\text{devo essere } gU \cap hV = \emptyset \quad \forall g, h \in G$$

• Verifico che $\boxed{U \cap gV = \emptyset} \quad \forall g \in G$ (5)

Ricordo che $A \cap gA = \emptyset$ tranne che se $g = g_i \quad i = 1, \dots, n$

$$U = A \cap \bigcap_{i=1}^n U_i \quad V = A \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1} V_i$$

se g è diverso dai g_i $A \cap gA = \emptyset$

$$\underline{U \cap gV \subseteq A \cap gA = \emptyset} \quad \text{ce}$$

se invece $g = g_i$ per qualche i $U \subseteq U_i$
 $V \subseteq g_i^{-1} V_i$

$$U \cap g_i V \subseteq U_i \cap g_i (g_i^{-1} V_i) = U_i \cap V_i = \underline{\underline{\emptyset}}$$

• Abbiamo finito! Se $\exists g, h \in G$ t.c.

$$hU \cap gV \neq \emptyset$$

(16)

allora $h^{-1}(hU \cap gV) \neq \emptyset$

"

$$h^{-1}hU \cap h^{-1}gV$$

"

$$U \cap h^{-1}gV$$

" $\rightarrow$ per punto precedente

$\emptyset$

quindi lo amando

ES Dimostrare direttamente
che quoziente di spazio TZ

$\boxtimes$

per azione propr. discontinua
è ancora TZ