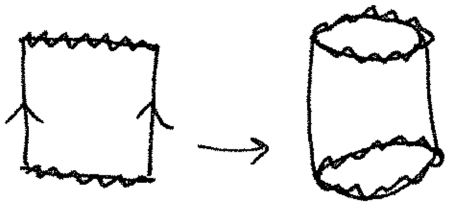
continuiamo figure ottenute da poligoni piani per identificazioni opportune dei bordi:

<u>visto</u>: cilindro  C

striscia di Möbius  M

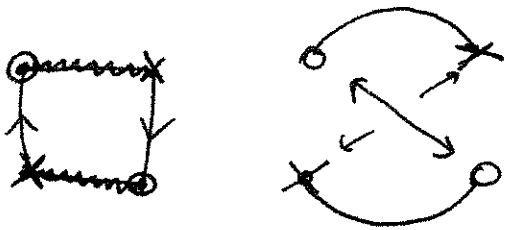
<u>OSS</u>



C

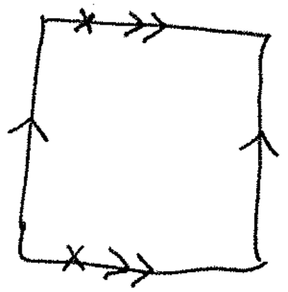
se considero $I\times\{0\}$ e $I\times\{1\}$ in $Q \subseteq \mathbb{R}^2$

l'immagine di $I\times\{0\}$ è un S^1 $\subseteq C$
" $I\times\{1\}$ è un S^1



l'immagine di $(I\times\{0\})\cup(I\times\{1\})$ è un S^1 in M

Altre figure importanti:



scriviamo relazione di equivalenza schematizzate dalla figura:

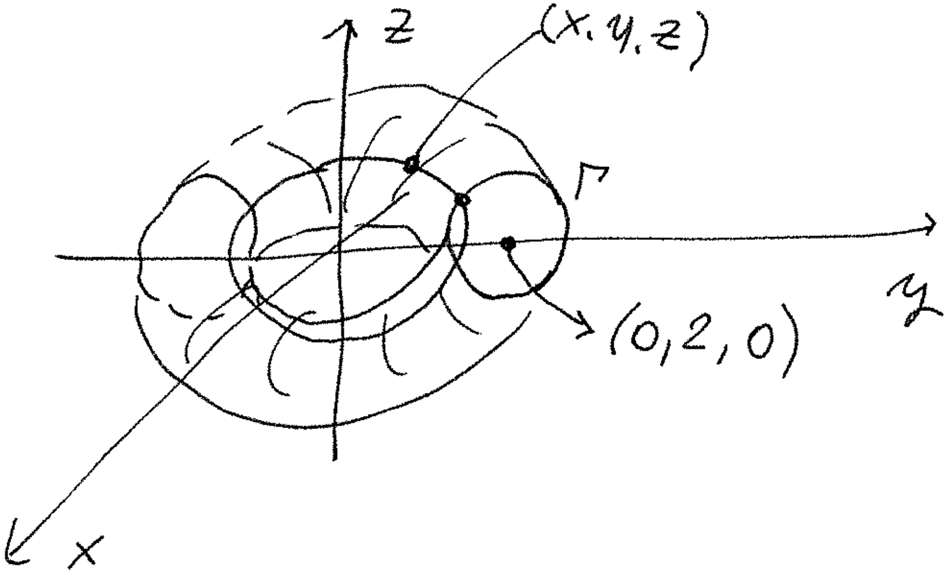
$$(x,y) \sim (x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ \text{oppure} \\ \{x,x'\}=\{0,1\} \text{ e } y=y' \\ \text{oppure} \\ \{y,y'\}=\{0,1\} \text{ e } x=x' \end{cases}$$

$Q=[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

$Q/\sim \; =: T$ si chiama toro bidimensionale

<u>idea</u>:

Scriviamo equazione di una figura di questa forma "a ciambella in $\mathbb{R}^3$" e costruiamo un omeomorfismo con T:



nel piano $\{x=0\}$ prendo circonferenza centrata in $(0,2,0)$ di raggio 1

$$(y-2)^2+z^2=1$$

costruisco la figura ottenuta da Γ ruotandolo intorno all'asse z

R_Γ figura che voglio descrivere

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in R_\Gamma$

se e solo se

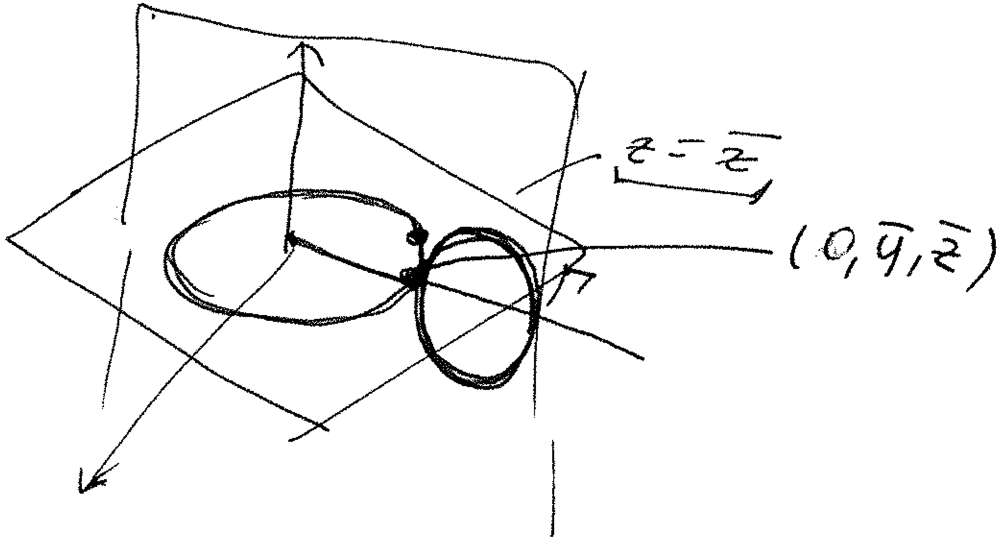
viceversa

$\underbrace{(0, \bar{y}, \bar{z}) \in \Gamma}$

voglio:

$(x, y, \bar{z})$ tali che

$x^2 + y^2 = \bar{y}^2$



$\forall (0, \bar{y}, \bar{z}) \in \Gamma$ cioè $(0, \bar{y}, \bar{z})$ t.c. $\underbrace{(\bar{y} - 2)^2 + \bar{z}^2 = 1}$

$\rightsquigarrow (x, y, \bar{z}) \in R_\Gamma$ con $x^2 + y^2 = \bar{y}^2 \quad z = \bar{z}$

$$\left\{ (x, y, z) \text{ t.c. } \left(\sqrt{(x^2 + y^2)} - 2\right)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

In generale se ho $F \subseteq \{x=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$F = \{x=0, \ g(y, z)=0\}$$

R_F figura di rotazione di F rispetto all'asse z

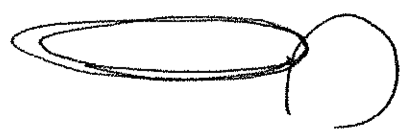
è data dall'equazione

$$R_F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0\}$$

Abbiamo dunque $R_\Gamma : \{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$

e $T = Q/_{\sim}$ scriviamo R_Γ in un altro modo:

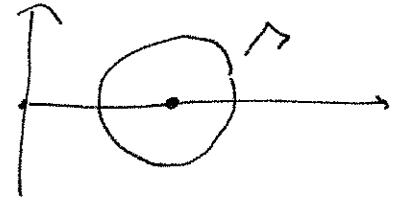
$$(0,\bar{y},\bar{z})\in\Gamma$$

prendo i punti della forma 

$$(\bar{y}\cos t, \ \bar{y}\,\mathrm{sen}\, t, \ \bar{z})$$

e $(0, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 2+\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

$\alpha \in [0, 2\pi]$.



posso descrivere R_Γ in questo modo:

per $t \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$\{ (2+\cos\alpha)\cos t, (2+\cos\alpha)\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\alpha) \}$$

Dunque abbiamo

$$\varphi : [0, 2\pi]^2 \longrightarrow R_\Gamma$$

$$(\alpha, t) \longmapsto$$

φ è continua e suriettiva ed è <u>CHIUSA</u>

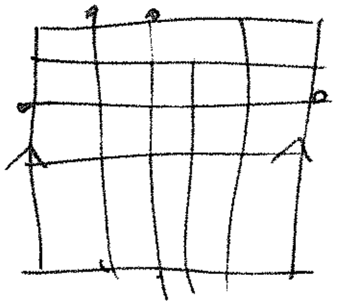
verificatelo per esercizio

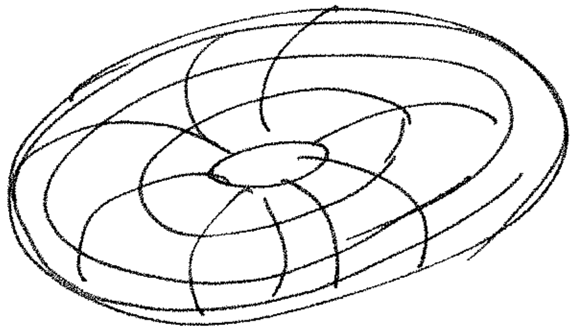
e le sue fibre coincidono con

le classi di equivalenza di $\sim$ (la relazione che def. il toro) solito ragionamento : $Q/_{\sim} \sim R_r$

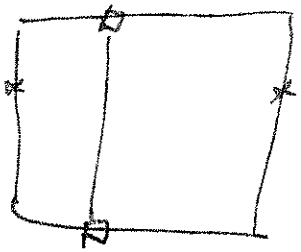
Altra cosa da notare :

prendo $[0,1] \xrightarrow{f} S^1$ appl esponenziale





$[0,1] \times [0,1] \xrightarrow{f \times f} S^1 \times S^1$ vale che : questa è ancora identificazione chiusa (per esercizio)

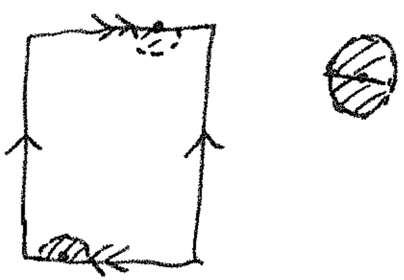


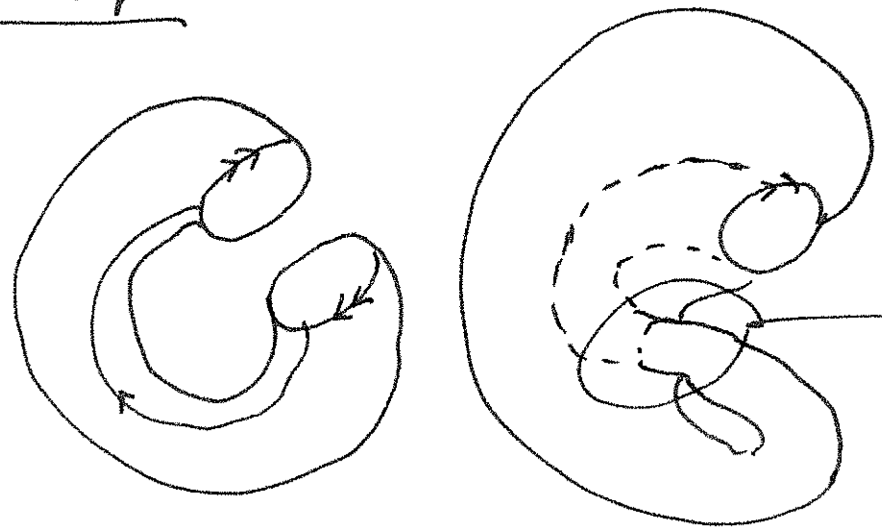
e le fibre sono le stesse delle due sopra !

$$\Rightarrow \quad T = Q/_{\sim} \simeq R_p$$
$$\wr$$
$$S^1 \times S^1$$

Altri spazi di questo tipo

Bottiglia di Klein

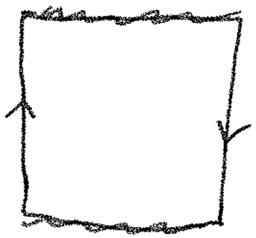
$K :=$ 



non è corretto

non esiste
un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a questo spazio
Ma invece posso realizzarlo in $\mathbb{R}^4$

$\Big(\text{immagine di } \overbrace{(I\times\{0\})\cup(I\times\{1\})}^{=\,B}\Big) \sim S^1$

$M =$ 

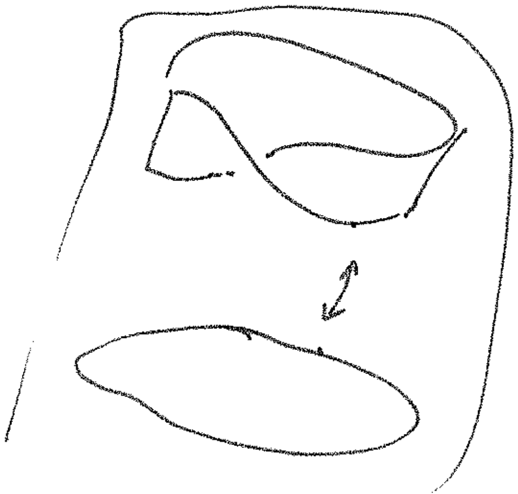
ora riccollo ad M un disco chiuso $D \subseteq \mathbb{R}^2$

identificando $B \underset{\varphi}{\sim} S^1 = \partial D$ $\qquad \underbrace{\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}}$

$$\frac{M \sqcup D}{\sim_\varphi}$$

dove def. relazione di equivalenza sull'unione disgiunta $M \sqcup D$

(notaz: $\sqcup$ = unione disgiunta)



$\subseteq \mathbb{R}^3$

$x \sim_\varphi y$ sse
- $x = y$

oppure
- $x \in B$ e $y \in \partial D$ e $\varphi(x) = y$

oppure $x \in \partial D$ e $y \in B$ e $\varphi(y) = x$

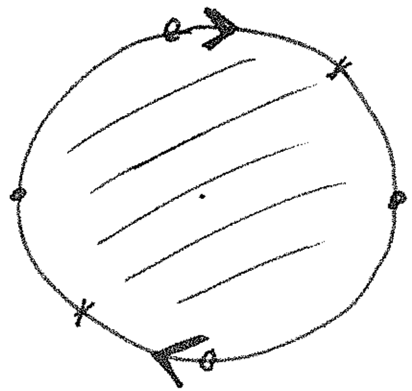
l'oggetto ottenuto si chiama piano proiettivo reale

$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$

un'altra descrizione di $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ (definisco uno spazio omeomorfo a quello appena definito)

è $D \subseteq \mathbb{R}^2$ disco unitario chiuso

considero $\sim$ $\quad x \sim y$ se $\begin{cases} x = y \\ \text{o } x = -y \end{cases}$



Provate a trovare un omeomorfismo tra $\dfrac{D \cup M}{\sim_\varphi}$ e $D/\sim$

<u>def</u> X, Y spazi topologici

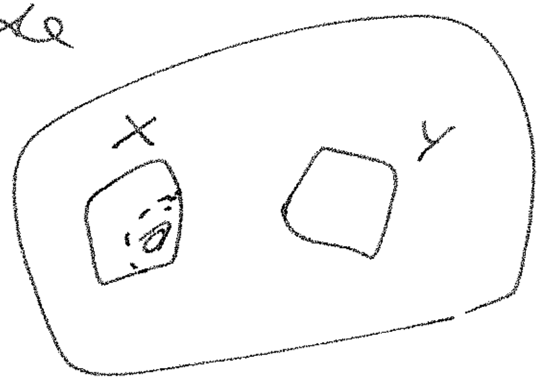
voglio dare una topologia sulla loro <u>unione</u>

$X \sqcup Y$ unione disgiunta tra X e Y

è lo spazio topologico che è formato da

$X \cup Y$ come insieme

$$\tau = \{ U \cup V, \ U \in \tau_X, \ V \in \tau_Y \}$$



<u>def</u> X insieme G gruppo

Azione sinistra di G su X è

un'applicazione $G \times X \longrightarrow X$
$(g, x) \longmapsto g \cdot x$

tale che: 1) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$ dove $e \in G$ è elemento neutro

se $\circ$ è la legge di composizione di G

2) $(g \circ h) \cdot x = g \circ (h \cdot x) \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$

<u>oss</u> $\forall g \quad \vartheta_g : X \longrightarrow X$
$x \longmapsto g \cdot x$

se prendo $\vartheta_{g^{-1}}$ questa è l'inverso di ϑ_g!
$\vartheta_{g^{-1}}(x) = g^{-1} \cdot x$

infatti: $\forall x \in X$ $\quad \vartheta_{g^{-1}}(\vartheta_g(x)) = \vartheta_{g^{-1}}(g \cdot x) =$

$$= g^{-1} \cdot (g \cdot x) \underset{(2)}{=} (g^{-1} \circ g) \cdot x = e \cdot x \underset{(1)}{=} x$$

$\Rightarrow \vartheta_g : X \to X$ è biiettiva

def $\quad X$ spazio topologico $\qquad G$ gruppo

dico che X è un G-spazio o che

G agisce a sin. su X se

G agisce sull'insieme X a sin

e vale che $\forall g \quad \vartheta_g$ è continua quindi $\vartheta_g : X \longrightarrow X$ è un omeomorfismo $\forall g$

infatti $\vartheta_{g^{-1}}$ è inversa di ϑ_g e per la definizione

è continua. ok

OSS $\mathrm{Omeo}(X) = \{ \varphi : X \to X \text{ omeomorfismi} \}$

comp. di omeo è operazione di gruppo su $\mathrm{Omeo}(X)$

id_X è elem. neutro

e $\forall \varphi$ φ^{-1} è inverso

se ho G gruppo che agisce a sin. su X spazio topologico

$$\begin{array}{rcl} \vartheta : G & \longrightarrow & \mathrm{Omeo}(X) \\ \quad \ni & & \ni \\ g & \longmapsto & \vartheta_g \end{array}$$

osserviamo che $\forall\, g, h \in G \quad \forall x \in X$

$$\vartheta_{g \cdot h}(x) = (g \cdot h) \cdot x \underset{(1)}{=} g \cdot (h \cdot x) = (\underbrace{\vartheta_g \circ \vartheta_h}_{\text{comp. di mappe}})(x)$$

$\Rightarrow$ ϑ appena definito

è un <u>omomorfismo di gruppi</u>

Quindi se ho G gruppo che agisce su sp. top X

ho associato un omomorfismo di gruppi

$$G \longrightarrow \mathrm{Omeo}(X)$$

e vale anche il viceversa! se G è un gruppo
X sp. top

ed $\exists$ omom. di gruppi

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{Omeo}(X)$$

$\Rightarrow$ è ben det. un'azione sinistra di G su X

tale che $\vartheta = \psi$.

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto \psi(g)(x)$$

<u>OSS.</u> X insieme con G gruppo che agisce a sinistra

posso definire:

orbite: $\quad G \cdot x = \{ g \cdot x \ , \ g \in G \} \ni x$
$x \in X$

perché $e \cdot x = x$ (1)

due orbite o coincidono o sono disgiunte (verificatelo!)

posso definire rel. di equivalenza su X

$$x \sim y \quad \text{sse} \quad x = g \cdot y \quad \text{per qualche } g \in G$$

verificate che è rel. di equivalenza e che le classi sono le orbite

<u>def</u> X sp. top. con G gruppo che agisce a sin. su X

$$X/G := X/\sim$$ spazio quoziente di X rispetto all'azione di G

<u>Es.</u> def
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(z, t) \longmapsto t + z$$

è azione di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ su $\mathbb{R}$

com'è fatto il quoziente ??