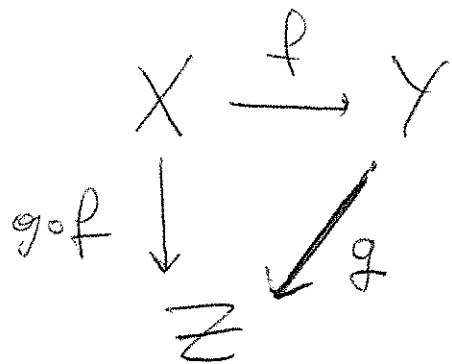


22 novembre 2017 ①

Lemma $X \xrightarrow{f} Y$ f suriettiva

Y con topologia quoziente (data da X ed f)
 $f_* \mathcal{T}_X$

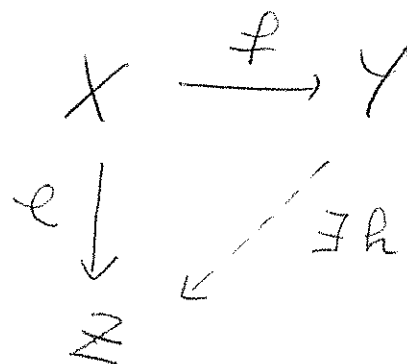


$\forall Y \xrightarrow{g} Z$ Z spazio topologico

g continua $\Leftrightarrow g \circ f$ è continua

OSS visto prop. universale delle top. quoziente.

Dato f
data ℓ



$\exists h$ t.c. $h \circ f = \ell$
 ed è unico

sse ℓ è costante sulle fibre di f

e h continua $(\Rightarrow) \ell$ è continua

dim supp che $g \circ f$ se aperta (3)

$\forall W \subseteq X$ aperto $g \circ f(W)$ aperto in Z

vediamo che g è aperta.

prendo U aperto in Y : $f^{-1}(U)$ aperto in X

$g \circ f(f^{-1}(U))$ aperto in Z

"
 $g(U)$

(puoi $f(f^{-1}(U)) = U$)
per suriettività

□

quindi la lemma è seconda parte delle
proprietà universali

Lemma stesse condizioni del lemma precedente

$$f^{-1}(U) \subset X \xrightarrow{f} Y \supset U \quad \underbrace{g \text{ aperta} \iff g \circ f \text{ è aperta}}_{\text{}} \quad \begin{array}{c} g \circ f \downarrow \quad \swarrow g \\ Z \end{array}$$

Nota bene: f non è detto che sia aperta!

dim g aperta

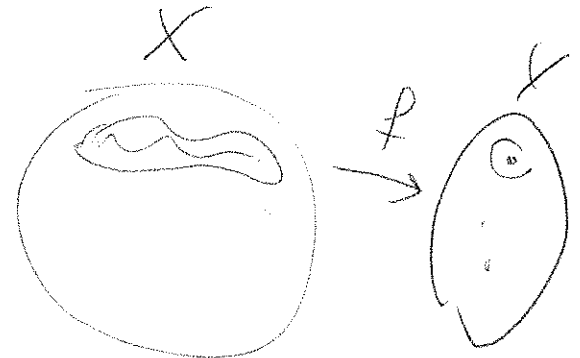
$$(\Leftrightarrow) \forall U \subseteq Y \text{ aperto} \quad g(U) \subseteq Z \text{ aperto}$$

U aperto sse $f^{-1}(U)$ è aperto in X

OSSERVAZIONI INSIEMISTICHE

4

$f: X \rightarrow Y$ applicativa

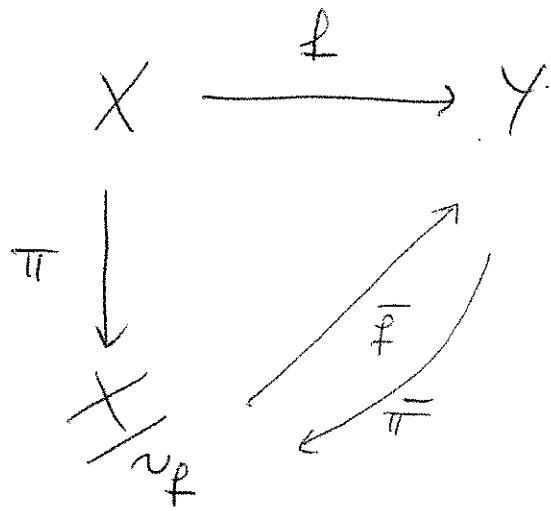


è associata in modo naturale
a rel. di equivalenza: appartenere
alle stesse fibre.

$$x, y \in X \quad x \sim_f y \quad (=) \quad f(x) = f(y)$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{cor. biunivoca} & \\ X / \sim_f & \longleftrightarrow & Y \end{array}$$

$$[x] \longleftrightarrow f(x)$$



$$\begin{aligned}
 \bar{f} \circ \bar{\pi} &= \text{Id}_Y \\
 \bar{\pi} \circ \bar{f} &= \text{Id}_{X/\sim_f}
 \end{aligned}$$

D'altra parte se ho X insieme
 + $\sim$ rel. di equivalenza su X

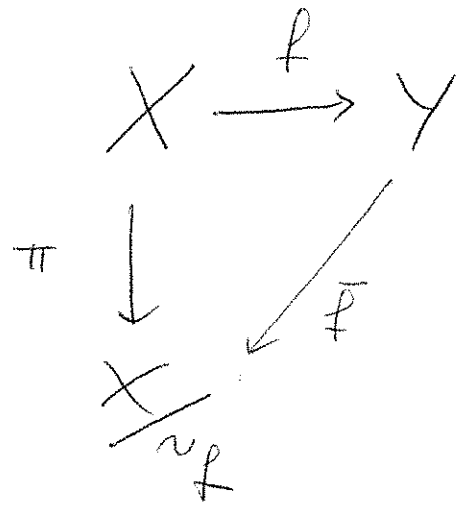
$$X \xrightarrow{\pi} X/\sim \text{ è appl. suriettiva}$$

Corrispondenza tra appl. suriettive e relazioni di
 equivalenza su X

siano due X e Y sp topologici

⑥

$f: X \longrightarrow Y$ funzione continua con Y
con topologie quoziente

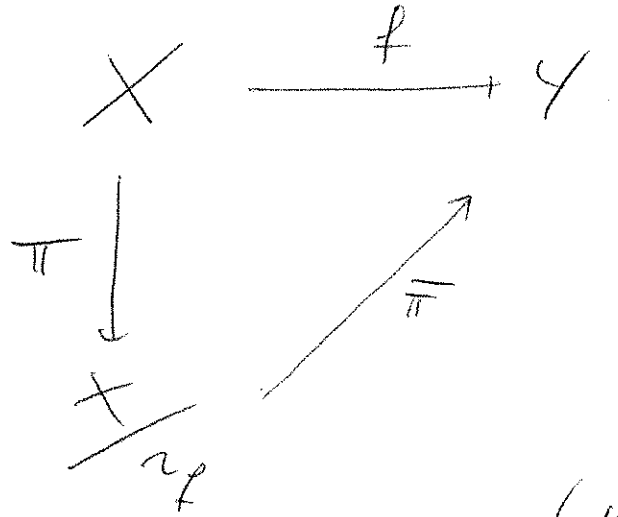


voglio: $\boxed{Y \sim X/\sim_f}$

è un esercizio nell'uso
della prop. universale delle
topologie quoziente.

$\bar{f}$ esiste perchè π è costante sulle fibre di f
e prop. universale delle top quoziente su Y
dice: $\bar{f}$ continuo sse π è continuo

Ma π è continua: $\bar{f}$ esiste ed è continua ⑧



$\bar{\pi}$ esiste perché

f è costante sulle

fibre di π

ed è continua ($\Rightarrow$) f è cont.

(prop. universale della

top. quoziente su $X / \sim_f$)

$\Rightarrow$ esistono $\bar{f}$ e $\bar{\pi}$ continue, una l'inversa

dell'altra: definiscono

$$\boxed{X / \sim_f \simeq Y}$$

(8)

X spazio topologico $S \subseteq X$ sottoinsieme

Definisco $\sim_S$ rel. di equivalenza su X

$$x \sim_S y \iff \begin{cases} x = y \\ \text{oppure} \\ x, y \in S \end{cases}$$

def $X_{/\sim_S} =: X/S$ questo spazio topologico si chiama
contrazione a un punto di S

oss $\pi: X \longrightarrow X/S$ $\pi|_{X \setminus S}: X \setminus S \longrightarrow X/S \setminus [S]$
è biettiva

verifichiamo che $\pi|_{X \setminus S}$ è omeomorfismo:

$\pi|_{X \setminus S}$ ommamente è continua

$\pi|_{X|S}$ è aperta: infatti se $U \subseteq X|S$ è aperto

⑦

allora è aperto saturo: $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$

allora $\pi(U)$ sappiamo che è aperto. fine

Esempi

1) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$$\frac{[0, 1]}{[0, 1)} = Y \quad S = [0, 1)$$

$$Y = \{p, q\} \quad p = [1] \quad q = [[0, 1))$$

↑
classe di
equivalenza

com'è fatta la
topologie su Y ?

$$\pi: [0, 1] \longrightarrow Y$$

$U \subseteq Y$ aperto sse $\pi^{-1}(U)$ aperto in $[0, 1]$

$$1 \longmapsto p$$

$$[0, 1) \longmapsto q$$

Quindi: $\{p\}$ non è aperto in Y

(10)

$\{q\}$ sì $[0, 1) \subseteq [0, 1]$ è aperto:
" $(-\infty, 1) \cap [0, 1]$

$$\tau_Y = \pi_X(\tau_{[0, 1]}) = \{Y, \emptyset, \{q\}\}$$

osserviamo che Y non è T_1

ES1: Quando la contrazione a un punto di
un sottoinsieme di uno spazio T_1 è T_1 ?

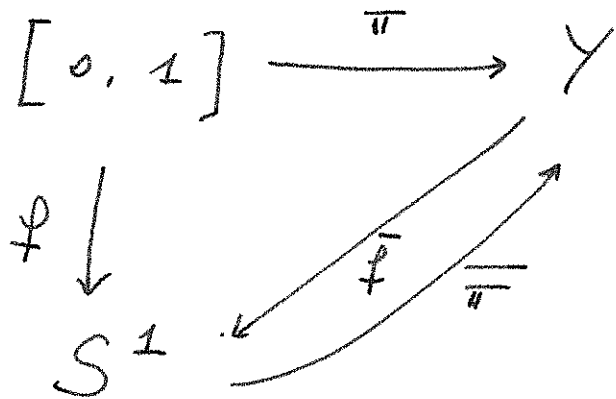
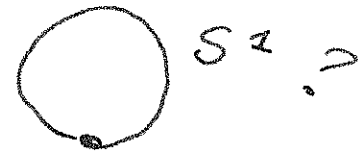
X T_1 $S \subseteq X$ Quando X/S è T_1 ?

Vero sse S è chiuso in X

2) $[0, 1]$ $S = \{0, 1\}$

verifichiamo che

$$Y := \frac{[0, 1]}{\{0, 1\}} \sim S^1$$



$$f: [0, 1] \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$$e^{2\pi i t}$$

oss. insiemeistica: π ed f hanno le stesse fibre

ovv. $\exists \bar{f}: Y \rightarrow S^1$ t.c. $\bar{f} \circ \pi = f$

$\exists \bar{\pi}: S^1 \rightarrow Y$ t.c. $\bar{\pi} \circ f = \pi$

e $\bar{f} \circ \bar{\pi} = \text{id}_{S^1}$ $\bar{\pi} \circ \bar{f} = \text{id}_Y$

prop. univ. top quoziente su $Y \Rightarrow \bar{f}$ è continua
(perché f lo è)

(12)

inoltre: f è chiusa (fatto per esercizio)

2 modi: • allora f è identificazione

$\leadsto$ prop. universale applicata ad S^1

mi dice che π è continua (perché $\pi \circ f$ lo è)

$\Rightarrow \bar{f} \circ \pi$ sono omeomorfismi

• se f è chiusa $\Rightarrow \bar{f}$ è chiusa] pu
ES

$\bar{f}$ biettiva continua e chiusa $\Rightarrow$ è omeomorfismo.

$$\boxed{Y \sim S^1}$$

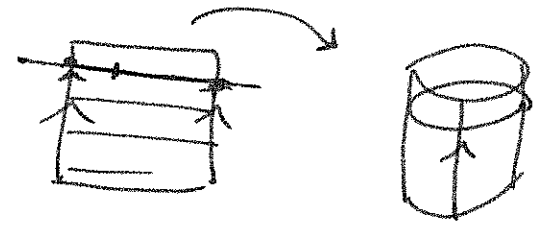
per vedere $D \simeq C$

$$\begin{array}{ccc}
 (x, y) \in \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi} & D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
 \downarrow \text{ } & & \nearrow \pi \\
 \downarrow f & & \searrow f \\
 (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y) \in C & &
 \end{array}$$

π ed f hanno le stesse fibre
 inoltre f è chiusa

oss: $f = e^{2\pi i t} \times \text{id}_{[0,1]}$

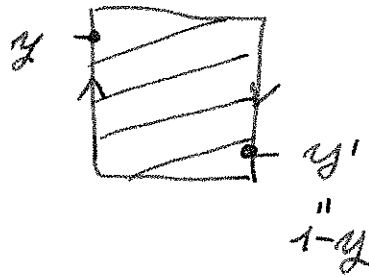
verificate tutto per esercizio.



(14)

stesso ragionamento
 di prima
 da' omeomorfismo
 che cercavo

2)



rel di equivalenza:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x \neq y) = (x' \neq y') \\ \text{oppure} \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \\ \text{e } y' = 1 - y \end{array} \right.$$

$$\mathbb{Q}/\sim =: M$$

Striscia di Möbius