

21 dicembre 2017



prop (di Lindeloff)

se X è spazio $\mathbb{Z}$ -numerabile (a base numerabile)

allora ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento numerabile.

dim Sia $\mathcal{B}$ base numerabile per X

Sia $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto

$\forall x \in X$ esiste $U_x \in \mathcal{A}$ t.c. $x \in U_x$

fisso allora $B_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_x \subseteq U_x$

$$\mathcal{F} = \{ \underbrace{B_x}_{\text{queste famiglie}}, x \in X \} \subseteq \mathcal{B}$$

queste famiglie è numerabile ed è un ricoprimento:

$\exists N \subseteq X$ N numerabile tc

②

$$\mathcal{F} = \{ B_x, x \in N \}$$

Allora se prendo $\{ U_x, x \in N \}$ è numerabile
ed è un
ricoprimento.

$$X = \bigcup_{x \in N} B_x \subseteq \bigcup_{x \in N} U_x$$

$\square$

Successioni

(3)

def X sp. top.

applicazione

successione valori in X e $\mathbb{N} \xrightarrow{a} X$

$$a_n := a(n)$$

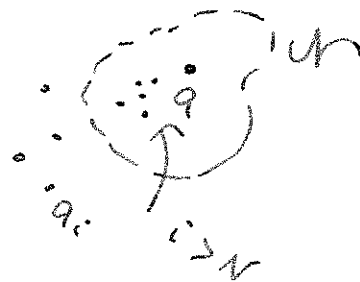
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ← notazione

- si dice che una successione tende ad $a \in X$
ovvero che ha limite a

se $\forall \mathcal{N}$ intorno di a

$$\exists N \in \mathbb{N}^{>0} \text{ t.c. } \forall n > N$$

$$a_n \in \mathcal{N}$$



- a è un punto di accumulazione per $\{a_n\}$

se $\forall \mathcal{N}$ intorno di a $\forall N \in \mathbb{N}^+$

$$\exists n > N \text{ t.c. } a_n \in \mathcal{N}$$

OSS:

④

- Se X è T2 e $\{a_n\}$ è successione in X che ammette limite, allora il limite è unico.
supponiamo che $\{a_n\}$ ammette due limiti
distinti $a \neq b$



Per ipotesi (X, τ) $\exists U, V$
intorni aperti di a e b rispettivamente,
tali che $U \cap V = \emptyset$

a limite di a_n : dato ^{quell'} $U \exists N$ t.c. $\forall n > N \quad a_n \in U$

b " " " " $V \exists M$ t.c. $\forall n > M \quad a_n \in V$

$$\Rightarrow \forall n > \max\{N, M\} \quad a_n \in \underbrace{U \cap V}_{\text{vuoto}} = \emptyset$$

• se pseudo $(X, \mathcal{C})$ $\mathcal{C} = \{X, \emptyset\}$

(5)

a_n successione a valori in X

fisso $x \in X$ arbitrario. Dico che x è limite di a_n :

devo vedere che $\forall \mathcal{N}$ intorno di x $\exists N$ t.c.
 $\forall n > N \quad a_n \in \mathcal{N}$

Sia dunque $\mathcal{N}$ intorno di $x \Rightarrow \mathcal{N} = X$
 $\downarrow$
top. concreto!

allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in X = \mathcal{N} \quad !$

In uno spazio concreto ogni successione tende
ad ogni punto

• Se prendo $(X, \mathcal{O})$

⑥

$$a_n \rightarrow a \quad (\Leftrightarrow) \quad \nexists \text{ intorno di } a \\ \exists N \geq 0 \text{ t.c. } a_n \in \mathcal{U} \quad \forall n > N$$

In particolare posso prendere $\mathcal{U} = \{a\}$

$$\exists N \text{ t.c. } a_n \in \{a\} \quad \forall n > N$$

$$\text{cioè } \exists N \text{ t.c. } a_n = a \quad \forall n > N$$

Quindi in uno spazio discreto una successione
è convergente se e solo se è definitivamente
costante.

def sia $\{a_n\}$ successione a valori in uno spazio topologico X una sua sottosuccessione è:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{a} X$$

composizione $a \circ k$

con $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

appl strettamente crescente

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{a_{k(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$\{a_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$$

Lemma Sia $\{a_n\}$ successione in spazio topologico X

se $\exists$ sottosuccessione $\{a_{k(m)}\}$ che converge

a un punto $p \in X \Rightarrow p$ è di accumulazione

per $\{a_n\}$.

Per esercizio

PROP Sia X spazio topologico 1 -numerabile

(8)

$S \subseteq X$. Sono equivalenti le seguenti condizioni per $x \in X$

- 1) $\exists$ successione a valori in S che converge a x ;
- 2) x è punto di accumulazione di una successione a valori in S ;
- 3) $x \in \overline{S}$.

dim

(1) $\Rightarrow$ (2) ovvio

(2) $\Rightarrow$ (3) x punto di acc. per $\{a_n\}$ successione a valori in S

voglio: $\forall \mathcal{N}$ intorno di x $\mathcal{N} \cap S \neq \emptyset$

Prendo $\mathcal{N}$ intorno di x ~~so che~~ $\exists \mathcal{N}_t$

so che $\exists n$ t.c. $a_n \in \mathcal{N}$ chiara $a_n \in S$ e $a_n \in \mathcal{N}$

OK

(3) $\Rightarrow$ (1) $\overset{sp}{x} \in \overline{S} \Rightarrow \exists$ successione in S convergente a x

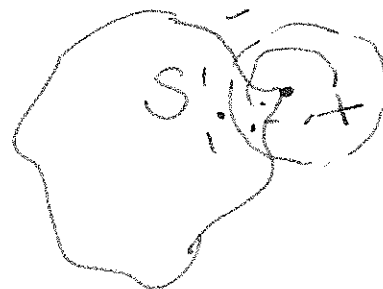
(9)

Qui è fondamentale la 1-numerabilità:

$\exists$ sistema fond. di

intorni di x

numerabile $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 



La uso per definire una successione convergente a x !

$\forall n$ so che $U_n \cap S \neq \emptyset$

quindi fisso un $a_n \in U_n \cap S$

Ho $\{a_n\}$ successione in S

verifichiamo che $a_n \rightarrow x$

Sia N intorno di x $\exists \bar{n}$ t.c. $U_{\bar{n}} \subseteq N$ perché
sono sist. fond. di intorni

 posso supporre
 $U_n \supseteq U_{n+1}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Allora $\forall n \geq \bar{n}$ $U_n \subseteq N$ per $\otimes$

(10)

Per come ho def. la successione

$$\forall n \geq \bar{n} \quad a_n \in U_n \subseteq U_{\bar{n}} \subseteq N \quad \boxed{OK}$$

Lemma: X spazio topologico

(11)

siano $K_i \subseteq X$ ^{sotto spazi} compatti $i \in \mathbb{N}$ e chiusi

$$+c \quad K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \quad K_i \supseteq K_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$K_i \neq \emptyset \quad \forall i$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} K_i \neq \emptyset$$

dim

$\forall i > 0 \quad K_0 \setminus K_i$ è aperto in K_0

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (K_0 \setminus K_i) = K_0 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

Quindi $K_0 \setminus K_i$ sono un ricoprimento aperto per K_0

se e solo se $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$

chiaramente

$$\bigcap_{\text{finite}} K_i = \bigcap_{i \in \{\text{insieme finito}\}} K_i = K_{\min\{F\}} \neq \emptyset$$

(12)

$\Rightarrow$ se prendo sottofamiglia finite di $\{K_0 \setminus K_i, i \geq 1\}$

allora non è un ricoprimento di K_0 .

se $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ allora $\{K_0 \setminus K_i\}$ sarebbe un

ricoprimento e per quanto detto non avrebbe

sotto ricoprimenti finiti $\Rightarrow K_0$ non sarebbe compatto. $\square$

PROP se X spazio compatto.

Ogni successione in X possiede punti di accumulazione.

dim, Sia X compatto

sapp $\{a_n\}$ successione in X

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad C_m := \overline{\{a_n \mid n \geq m\}}$$

oss $\mathbb{N}$ se $m \leq m'$ $C_m \supseteq C_{m'}$

oss $x \in X$ è di accumulazione per $\{a_n\}$

(13)

se e solo se $x \in C_m \quad \forall m$.

Infatti $x \in X$ è di accumulazione per $\{a_n\}$

sse
(def) $\forall \mathcal{U}$ intorno di $x \quad \forall N \geq 0 \quad \exists \underline{\underline{m}} > N + c$
 $a_m \in \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{U}$ intorno di $x \quad \exists a_k \in \{a_n \mid n \geq \bar{m}\}$

+c $a_n \in \mathcal{U} \quad \text{cioè}$

~~$x \in$~~ $x \in \{a_n \mid n \geq \bar{m}\} = C_{\bar{m}} \subseteq C_N$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{U}$ intorno di $x \quad \forall N \geq 0 \quad x \in C_N$

X compatto $C_m \subseteq X$ chiusi

$\Rightarrow C_m$ sono compatti

C_m sono chiusi e compatti in X

$$\text{e } \forall m \quad C_{m+1} \subseteq C_m$$

$\Rightarrow$
lemma
precedente

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} C_m \neq \emptyset$$

$$\exists x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} C_m \quad \text{cioè} \quad \exists x \in X \text{ t.c. } x \in C_m \quad \forall m \geq 0$$

cioè
p. di accumulazione

x è di accumulazione
per $\{a_n\}$!

oss

Quindi compatto $\Rightarrow$ ogni successione possiede
punti di accumulazione

cosa c'entra con le sotto successioni convergenti?

Se X è 1- numerabile da un punto di

accumulazione per successione $\{a_n\}$ possiamo (15)
costruire una sotto successione convergente.

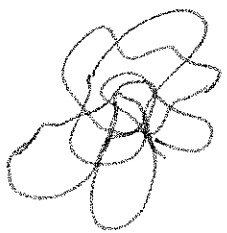
lemma (che serviva nel teorema precedente $\oplus$)

Se lo X primo-numerabile

$x \in X$ posso scegliere un sistema fond. di
intorni di x $\{U_n\}$ numerabile

con le proprietà che $U_{n+1} \subseteq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dim. sia $\{W_n\}$ sistemi fond. di intorni di x



$$W_0 = U_0$$

$$U_1 := W_1 \cap W_0 \rightarrow \text{è ancora intorno}$$

$$U_2 := U_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_2 \cap W_3$$

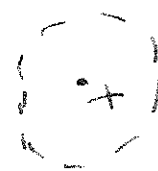
chiaro che c'è sist. fond. di intorno per x
con le proprietà che cerchiamo

(18)

Prop: X 1-numerabile.

$\{a_n\}$ successione. Sia $x \in X$ un suo punto di
accumulazione. $\exists$ sottosuccessione $\{a_{k(m)}\}$ di $\{a_n\}$
che converge a x .

dim, sia $x \in X$ di accumulazione per
 $\{a_n\}$
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$



~~$\exists k(m) \in \mathbb{N}$~~

$\exists \bar{n} \geq N \quad \text{t.c.} \quad a_{\bar{n}} \in U_n$

ponendo $m = 0 \quad N = 0$

$\exists \bar{n}(0) \geq 0 \quad \text{t.c.} \quad \bar{n}(0) \in U_0 \quad k(0) := \bar{n}(0)$

(17)

$$\rightarrow n=1 \quad N = \bar{m}(0) = k(0)$$

$$\exists \quad \bar{m}(\text{cancel}) \geq N = k(0) \quad \text{t.c.} \quad \bar{m}(\text{cancel}) \in U_1 \subseteq U_0$$

$$\text{def } k(1) = \bar{m}$$

$$\left[\begin{array}{c} n=e, \quad N = k(e-1) \\ \text{~~~~~} \rightarrow k(e) \end{array} \right]$$

e vado avanti con:

Ho costruito una sotto successione.

verificate che $\bar{e}$ convergente a x

☒

def X spazio top. si dice compatto per successioni

se ogni successione in X possiede sotto successioni convergenti.

visto: se X è $\mathbb{I}$ -numerabile e compatto

$\Rightarrow$ $\bar{e}$ compatto per successioni.