20 dicembre 2017

<u>visto</u>:

$X$ e $Y$ compatti $\Rightarrow$ $X \times Y$ è compatto

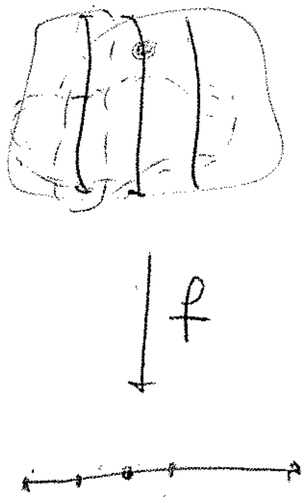
<u>Ora</u>: dimostrazione alternativa con risultati interessanti di per sé

<u>Teo</u>: $f: X \to Y$ appl tra spazi topologici continua

se vale:

- $f$ è chiusa;
- $Y$ è compatto;
- $\forall y \in Y \quad f^{-1}(y)$ è compatto;

allora $X$ è compatto.



$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}$$

<u>dim</u>

Dato $\mathcal{U}$ aperto di $X$

definiamo

$$\begin{array}{l} \mathcal{U}' = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq \mathcal{U} \} \\ \cap \\ Y \end{array}$$

vale che $\mathcal{U}'$ è aperto di $Y$:

$$Y \setminus \mathcal{U}' = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \not\subseteq \mathcal{U} \} =$$

$$= \{ y \in Y \mid \exists\, x \in \underset{y = f(x)}{f^{-1}(y)} \text{ tc } x \notin \mathcal{U} \} =$$

$$= f(X \setminus \mathcal{U})$$

per ipotesi $f$ è chiusa

$\Rightarrow f(\underbrace{X \setminus U}_{\text{chiuso}})$ è chiuso

$\Rightarrow U'$ è aperto. $\boxed{\text{ok}}$

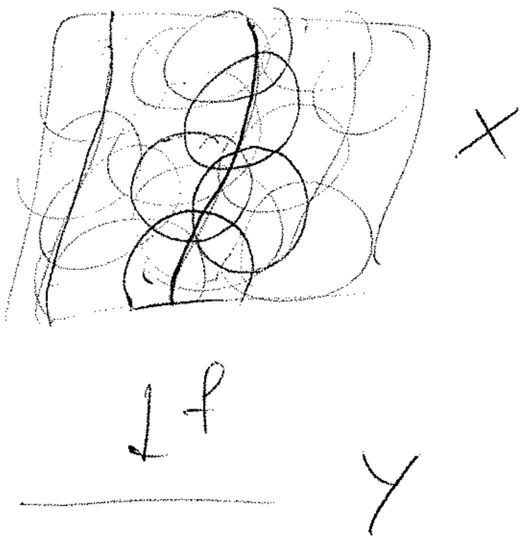
Sia ora $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $X$

Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \text{unioni finite} \\ \text{di elementi di } \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

$\cup\!|$

$\mathcal{A}$




OSS: vogliamo dimostrare che

$X \in \mathcal{F}$

Se prendo $\mathcal{F}' = \{ U' \subseteq Y \mid U \in \mathcal{F} \}$

questo è ricoprimento aperto di $Y$:

sia $y \in Y$ so che $f^{-1}(y)$ è compatto

e ovviamente $\mathcal{A}$ ricopre anche $f^{-1}(y)$

esistono # finito di elem. di $\mathcal{A}$ che ricoprono

$f^{-1}(y) \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{F}$ tc $f^{-1}(y) \subseteq U$

$\Rightarrow y \in U' = \{ y' \in Y$ tc $f^{-1}(y') \subseteq U \}$

estraggo sottoricoprimento aperto di $Y$

da $\mathcal{F}'$ per compattezza di $Y$

⑤

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}_1' \dots \mathcal{U}_k'$ tc $Y = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i'$

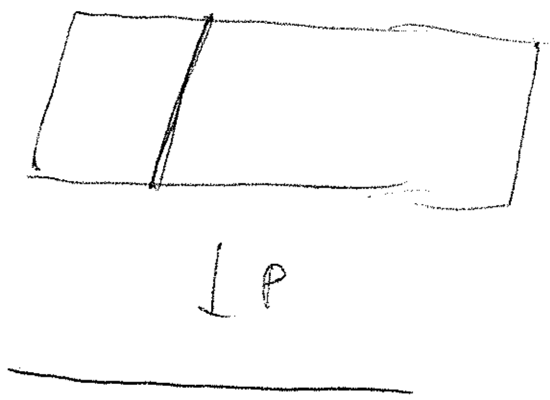
Ma allora $X = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$ perché $\mathcal{U}_i \supseteq f^{-1}(\mathcal{U}_i')$

Ma ogni $\mathcal{U}_i$ per def è unione finita di elementi di $\mathcal{A}$ quindi $\boxed{\text{ok}}$

<u>Lemma</u>: $X, Y$ spazi topologici con $X$ compatto

$X \times Y \xrightarrow{p} Y$ proiez. su $Y$

vale che $p$ è <u>chiusa</u>.



<u>dim</u> prendiamo $C \subseteq X \times Y$ chiuso

se $p(C) = Y$ ok è chiuso

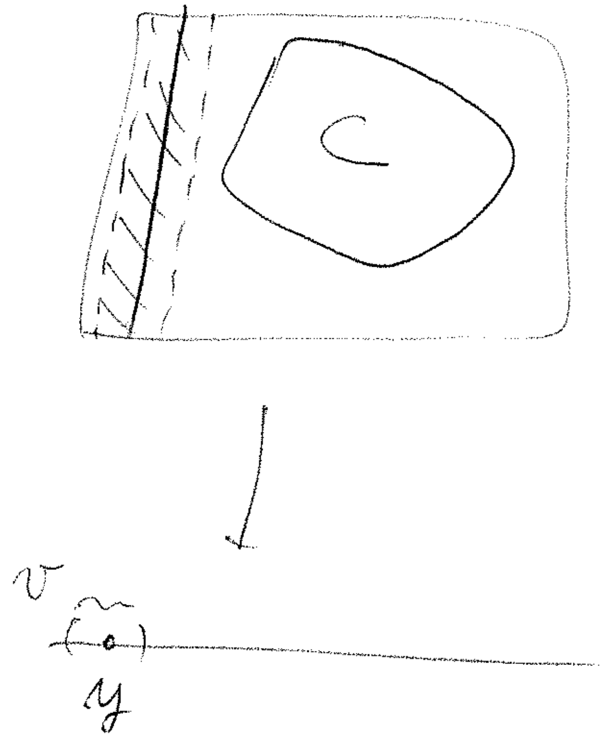
Altrimenti prendo $y \notin p(C)$

voglio vedere che $\exists\, V$ aperto in $Y$ tc

$$y \in V \subseteq Y \setminus p(C)$$

ovvero

$$\underset{\substack{\| \\ p^{-1}(V)}}{X \times V} \subseteq X \times Y \setminus C$$




(Rivedetelo)

<u>lemma del tubo</u>: $X$ compatto

$\forall\, W$ aperto di $X \times Y$

tc $W \supseteq X \times \{y\}$

$\exists\, V$ intorno aperto di $y$ tc

$$X \times V \subseteq W$$

posso applicare dunque il lemma del Tubo e ottenere il $V$ cercato. $\boxtimes$

<u>OSS</u>: Dal teorema + questo lemma ho altre dim che se $X$ e $Y$ sono compatti allora $X \times Y$ lo è.

<u>ES</u>: cercate controesempi al lemma del tubo se tolgo compattezza di $X$.

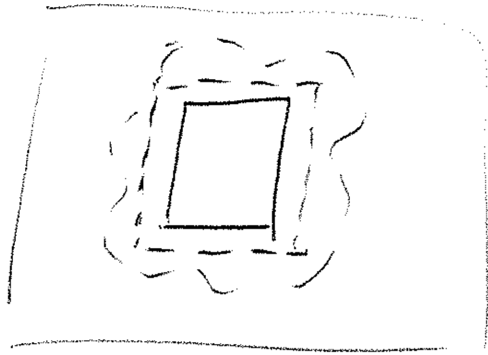
<u>OSS</u>: sul Manetti invece si usa "Teorema di Wallace":

$X, Y$ sp. top., e $\underset{\substack{\cap \\ X}}{S}, T \subseteq Y$ compatti

$\forall$ $W$ aperto di $X \times Y$ tc $W \supseteq S \times T$

$\exists\ \mathcal{U} \subseteq X,\ \mathcal{V} \subseteq Y$ aperti tc

$$S \times T \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$$



OSS
se prendo in particolare

$T = \{p\}$ $\qquad p \in Y$

l'enunciato è esattamente il lemma del tubo

provate a farlo per esercizio!

Quindi in generale $X_1, \dots X_n$ compatti

$\Rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ è compatto.

In particolare $[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto

Cor: (teo di Heine-Borel)

I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i chiusi e limitati.

dim: $\boxed{\Rightarrow}$

- se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ non è limitato non è compatto (possiamo costruire ric. aperto da cui non si può estrarre un sottoric. finito: $\{B_r(0) \quad r \in \mathbb{N}^+\}$)

- se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ non è chiuso $\Rightarrow$ non è compatto perchè visto che compatto in T2 è chiuso.

$\boxed{\Leftarrow}$ $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato e chiuso

$\Rightarrow \exists\, M > 0$ tc $S \subseteq \underbrace{[-M, M]^n}_{\text{compatto}}$

quindi $S$ è chiuso in un compatto

$\Rightarrow$ è compatto $\boxtimes$

se ho famiglia

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ arbitraria di sp. topologici

posso definire uno spazio prodotto?

Insiemisticamente : $\prod_\alpha X_\alpha = \{ \{x_\alpha\}, \alpha \in A\}$ t.c. $x_\alpha \in X_\alpha$ $\forall \alpha \in A$

come fare con la topologia :

→ prima possibile generalizzazione:

$\underbrace{\prod_{\alpha \in A} U_\alpha}$ $\quad U_\alpha \in \tau_{X_\alpha} \quad \forall \alpha \in A$

è base per una topologia su $\prod X_\alpha$, si chiama "topologia box" che però non serve molto.

$\to \quad \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha$ proiezione naturale indotta $\forall \alpha$ sull' $\alpha$-esimo fattore

posso def. su $\prod X_\alpha$

la topologia indotta dai $\pi_\alpha$: la chiamo ~~topologia prodotto~~

la più piccola topologia che rende continue le $\pi_\alpha$

la top box rende continue le $\pi_\alpha$

e nel caso $\# A < +\infty$ allora coincidono

ma in generale <u>no</u>

Base di aperti per Top. prodotto? $\tau_{\prod X_\alpha}$

$\forall \bar{\alpha} \in A \qquad \forall\, \mathcal{U}_{\bar{\alpha}} \subseteq X_{\bar{\alpha}}$ aperto

devo avere $\pi_{\bar{\alpha}}^{-1}(\mathcal{U}_{\bar{\alpha}})$ aperto in $\tau_{\pi X_\alpha}$

$$\begin{array}{c} \| \\ \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha \end{array} \quad \text{con} \quad Z_\alpha = \begin{cases} \mathcal{U}_{\bar{\alpha}} & \text{per } \alpha = \bar{\alpha} \\ X_\alpha & \text{per } \alpha \neq \bar{\alpha} \end{cases}$$

Fatto: la top prodotto ha come base gli elementi della forma

$$\prod_{\alpha \in A} Z_\alpha \quad \text{con} \quad Z_\alpha = \begin{cases} \overset{\text{aperti}}{\mathcal{U}_\alpha \subsetneqq X_\alpha} & \text{per \# finito di } \alpha \\ X_\alpha & \text{per il resto} \end{cases}$$

OSS se prendo $\overset{\neq \emptyset}{\mathcal{U}_\alpha} \subsetneqq X_\alpha \quad \forall \alpha$

l'elemento $\prod \mathcal{U}_\alpha \notin \tau_{\pi X_\alpha}$

# Proprietà di numerabilità

**def** $X$ spazio topologico si dice 2-numerabile (o a base numerabile) se $\exists$ base per la topologia di $X$ che sia numerabile.

**ES.** 1) $X$ spazio finito

$(X, \tau)$ è 2-numerabile per qualunque topologia $\tau$

2) $(\mathbb{R}, \tau_e)$

Invece $\prod U_\alpha \in$ Top box $\qquad \tau_{box} \supsetneq \tau_{prod} = \tau_{\prod X_\alpha}$ 14

valgono gli importanti teoremi

**Teo)** $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ è T2 sse $\forall \alpha \in A$ è T2

con $\tau_{\prod X_\alpha}$

provate a farlo (Munkres)

**Teo)** Tychonoff $\left( \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_{\prod X_\alpha} \right)$ è compatto

sse $\forall \alpha$ $X_\alpha$ è compatto

Dim un po' più dura

Dico che $\mathcal{B} = \{ (a, b) \quad a, b \in \mathbb{Q} \} \longleftrightarrow \underset{\text{numerabile}}{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$

$\mathcal{B}$ è base per $\tau_e$:

se prendo $(x, y)$ qualunque $\quad x < y \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\exists \{a_n\} \{b_n\}$ successioni di numeri razionali tc

$$a_n \longrightarrow x^+ \qquad b_n \longrightarrow y^- \quad \text{tali che}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) = (x, y)$$

$\Longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$ è 2-numerabile

allo stesso modo $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è 2-numerabile

ES: $(\mathbb{R}, \tau_S)$ non è 2-numerabile

OSS: $\{[a,b), \ a<b \ \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ non è una base per $\tau_S$ - Pensateci -

---

3) $(X, \mathcal{D})$ è 2-numerabile quando?

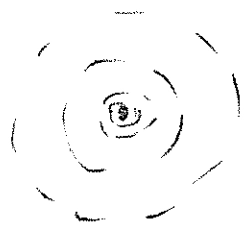
- Se $X$ è numerabile (finito oppure $X \leftrightarrow \mathbb{N}$) $\{\{x\}, \ x \in X\}$ è base numerabile
- se $X$ non è numerabile $\exists$ base per $\mathcal{D}$ numerabile? Una base per $\mathcal{D}$ comunque deve contenere i singoletti $\Rightarrow$ non è numerabile

<u>def</u> $X$ spazio topologico si dice primo-numerabile (1-numerabile) se ogni $x \in X$ abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile.

<u>ES</u> $(X, d)$ spazio metrico

$\forall x \in X \quad \{ B_{1/n}(x),\ n \in \mathbb{N}^+ \}$ è sistema fond. di intorni (aperti) di $X$

$$\left[ \begin{array}{l} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}(x) = \{\text{intorni di } x\} \\ \text{tc } \forall \mathcal{V} \text{ int. di } x \\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ tc } F \subseteq \mathcal{V} \end{array} \right]$$



$\Longrightarrow$ qualunque spazio topologico metrizzabile

è 1-numerabile.

(per esempio $(X, \mathcal{D})$ $\forall X \neq \emptyset$ insieme

è 1-numerabile)

20 Dicembre 

<u>def</u> $X$ spazio topologico si dice <u>separabile</u>

se $\exists$ sottoinsieme in $X$ <u>numerabile e denso</u>

<u>NB</u> NON c'entra con le proprietà di separazione $T_i$

<u>Esempio</u>: $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ con $\tau_e$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Quindi $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è separabile

- $(\mathbb{R}, \tau_S)$ Di nuovo vale che $\mathbb{Q}$ è denso:

Sia $U \in \tau_S$ $\underset{a<b}{\exists\, a,b}$ tc $[a,b) \subseteq U$

e ovviamente $\mathbb{Q} \cap [a,b) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\tau_S} = \mathbb{R}$

**PROP**: $X$ 2-numerabile $\Rightarrow$ è separabile

**dim** $\exists\, \mathcal{B}$ base per topologia di $X$ numerabile.

$\forall\, B \in \mathcal{B}$ prendo $x_B \in B$

$$\left|\{x_B \,,\, B \in \mathcal{B}\}\right| \leq |\mathcal{B}|$$

quindi è numerabile inoltre $E = \{x_B \mid B \in \mathcal{B}\}$

$E$ è denso: $E \cap \mathcal{U}$ $\qquad$ $\mathcal{U} \neq \emptyset$ aperto in $X$

allora $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tc $\quad x_B \in B \subseteq \mathcal{U}$

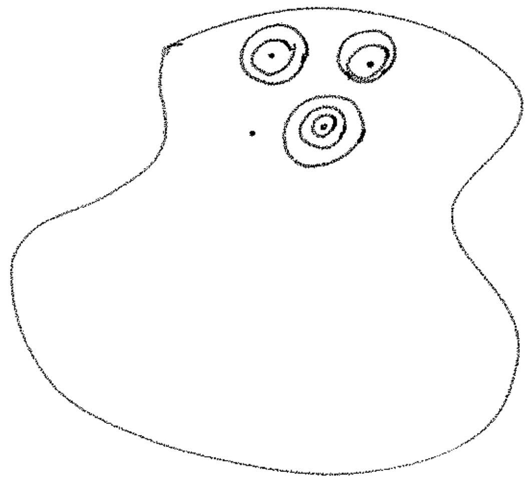
$$\Rightarrow x_B \in E \cap \mathcal{U} \qquad \boxtimes$$

<u>Lemma</u>: $X$ metrizzabile e separabile è <u>2-numerabile</u>

<u>dim</u> Sia $E \subseteq X$ denso e numerabile

prendo fisso $d$ metrica

$$\mathcal{B} = \{ B_r(e) \,,\ e \in E,\ r \in \mathbb{Q}^{>0} \}$$



Chiaramente $\mathcal{B}$ è un insieme numerabile.

Vediamo che è una base:

Sia $\mathcal{U}$ aperto in $X$ sia $x \in \mathcal{U}$

cerco $B \in \mathcal{B}$ tc $x \in B \subseteq \mathcal{U}$

$\exists\, r \in \mathbb{Q}^{>0}$ tc $B_r(x) \subseteq \mathcal{U}$

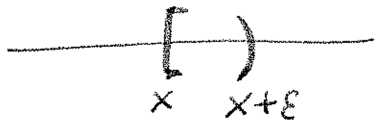
prendo $e \in B_{\frac{r}{3}}(x) \cap E$

Allora $B_{\frac{r}{2}}(e) \ni x$ e $B_{\frac{r}{2}}(e) \subseteq \mathcal{U}$ <u>verificatelo</u>

OSS: una volta verificato che $(\mathbb{R}, \tau_S)$ non è 2-numerabile, abbiamo che non è metrizzabile: infatti, se lo fosse, siccome sappiamo che è separabile, sarebbe 2-numerabile.

ES: $(\mathbb{R}, \tau_S)$ non è 2-numerabile

idea: $x \in \mathbb{R}$, dato $U \ni x$, $\exists \varepsilon > 0$ tc $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$




Prendiamo $\mathcal{B}$ base per $\tau_S$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \ B_x \in \mathcal{B}$ tc $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$

Ho costruito:

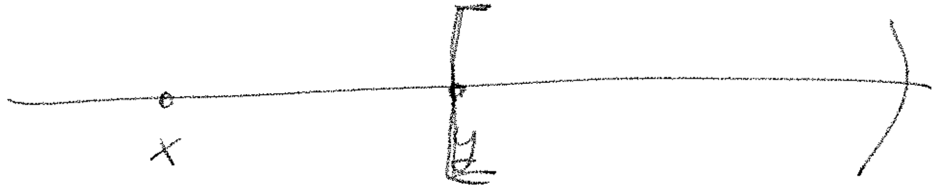
$x \longmapsto B_x$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}$

che è iniettiva

se $x \neq y$ diciamo $x < y$

$$\begin{array}{ccc} B_x & & B_y \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x, x+1) & & [y, y+1) \end{array} \implies B_y \neq B_x$$




$\implies$ esiste appl. iniettiva $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}$

$\implies$ $\mathcal{B}$ non è numerabile!

---

OSS - ESERCIZI

- 1 / 2 -numerabilità e separabilità sono proprietà topologiche. per esercizio.

- **ES**: su $\mathbb{R}$ definiamo rel di equivalenza

$x \sim y$ sse $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$

$X = \mathbb{R}/\sim$ verificare che $X$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità.

- **ES**: 2-numerabile $\Rightarrow$ 1-numerabile

$\exists$ base $\mathcal{B}$ numerabile

Prendo $x \in X$ prendo $\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B}$ tc $x \in B \} \subseteq \mathcal{B}$

Questo è un sistema fondamentale di intorni per $x$: $\forall \mathcal{N}$ intorno di $x$: $\exists\, \mathcal{U}$ aperto tc

$$x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}$$

$\exists\, B \in \mathcal{B}$ tc $x \in B \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}$ $\boxed{\text{OK}}$

$\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ numerabile!

ES: Prodotto di due spazi 1/2-numerabili (risp. separabili) è 1/2-numerabile (risp. separabile)

unico punto: se $\mathcal{B}$ è base per $X$, $\mathcal{B}'$ base per $Y$

$\{B \times B',\ B \in \mathcal{B},\ B' \in \mathcal{B}'\}$ è base per $X \times Y$

se $\mathcal{F}$ sist. fond. di int per $\bar{x} \in X$

$\mathcal{F}'$ " " " " " $\bar{y} \in Y$

$\{F \times F',\ F \in \mathcal{F},\ F' \in \mathcal{F}'\}$ è sist. fond. di int. di $(\bar{x}, \bar{y})$ in $X \times Y$

$E$ è denso in $X$, $F$ è denso in $Y$

$\Rightarrow$ $E \times F$ è denso in $X \times Y$

ES: 1) $f$ continua e suriettiva. $f: X \to Y$

vediamo che $X$ separabile $\Rightarrow$ $Y$ è separabile.

dim $\exists$ $E \subseteq X$ numerabile e denso in $X$

$f(E)$ è numerabile e denso in $Y$?

sì

sia $U \subseteq Y$ aperto non vuoto

$f^{-1}(U)$ è aperto non vuoto in $X$

(f continua) (f suriettiva)

$f^{-1}(U) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow U \cap f(E) \neq \emptyset$ $\boxtimes$

2) se inoltre $f$ è aperta $X$ 2-numerabile $\Rightarrow$ $Y$ 2-num.

OSS: nell'esempio di prima $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\sim$

non è 1-num

$\Rightarrow$ non è 2-num

Dimostrate direttamente che $\pi$ non è aperta

---

Sia dunque $f$ aperta e suriettiva e $X$ 2-numerabile

voglio vedere che $Y$ lo è.

Sia $\mathcal{B}$ base numerabile di $X$

"$f(\mathcal{B})$" $= \{ f(B), \ B \in \mathcal{B} \}$ è famiglia di aperti

è base di $Y$: sia $U$ aperto di $Y$

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ aperto in $X$ $\Rightarrow f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$

per certi $\alpha \in A$

$\Rightarrow \underbrace{f(f^{-1}(U))}_{\substack{\shortparallel \ f \text{ suriettiva} \\ U}} = f\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f(B_\alpha)$ $\boxed{\text{OK}}$