17 gennaio 2018

<u>Scopo</u>: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

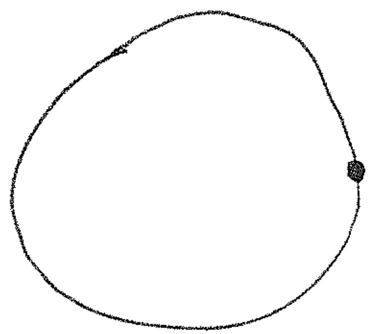
<u>idea</u>

$\alpha : I \longrightarrow S^1$ laccio con punto base $1$

possiamo associare un n° intero ad $\alpha$

$d(\alpha)$ che "conta" "quante volte $\alpha$

passa per $1$ con il segno"

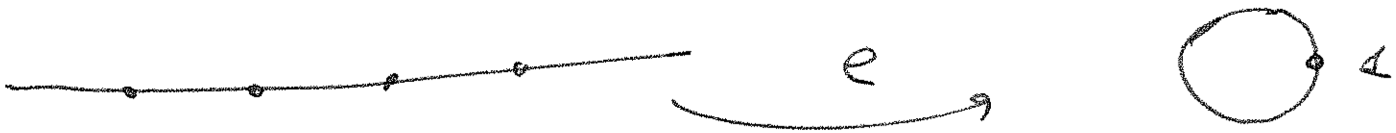


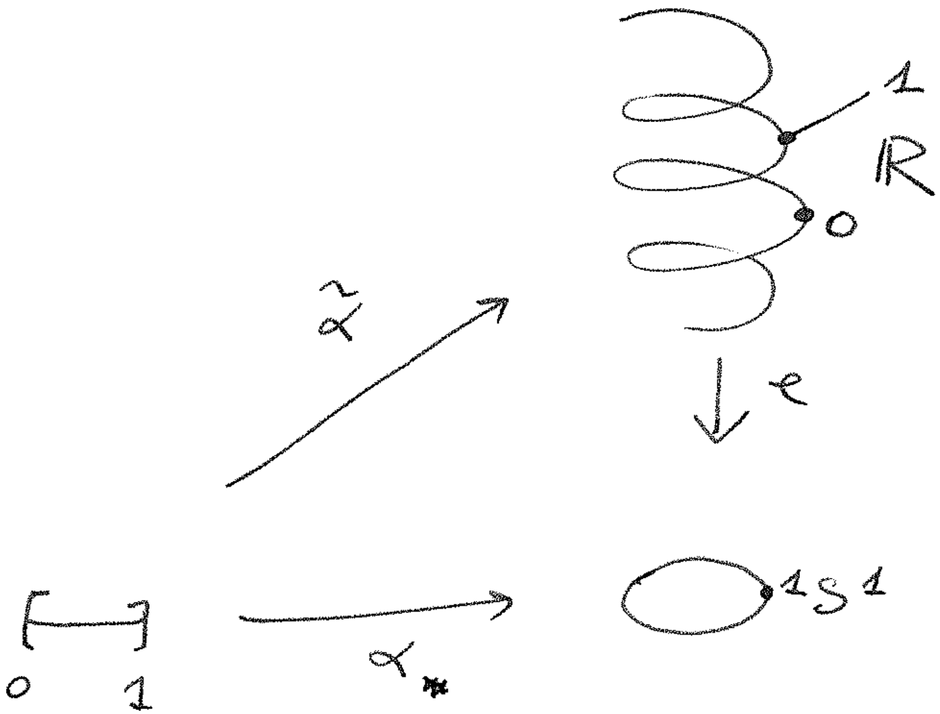
<u>ES</u>: $\rho_n : I \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$

$n \in \mathbb{Z}$ $\qquad t \longmapsto e^{2\pi n t} \qquad (\cos 2\pi n t,\ \operatorname{sen} 2\pi n t)$

"si avvolge $n$ volte intorno a $S^1$"

<u>idea</u> (2) usare $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$




$\alpha = p_1$

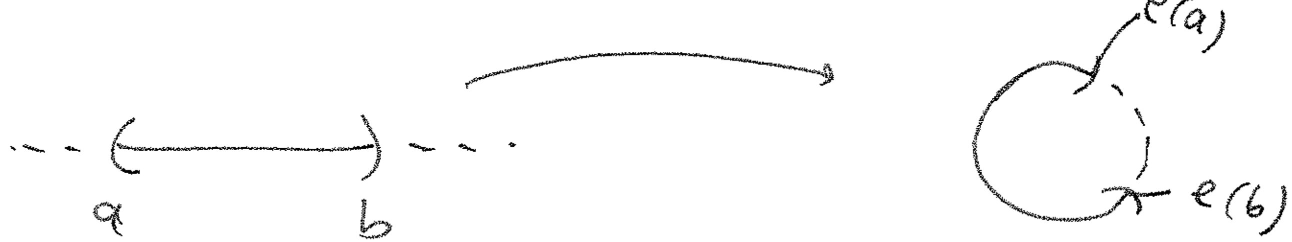
Osservazioni su $e$:

- $e$ è un omeomorfismo locale

più precisamente

$\forall (a,b)$ tc $b-a \leq 1$

$e|_{(a,b)}$ è un omeomorfismo




- $X \xrightarrow{f} S^1$ $X$ sp. topologico $f$ continua

se $f$ non è suriettiva, allora

$\exists\, p \in S^1$ tc $f(X) \subseteq S^1 \setminus \{p\} \simeq (0,1)$

tramite la restr. di $e$

ES. ogni applicazione continua in uno spazio contraibile è omotopa a una costante.

- $$e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

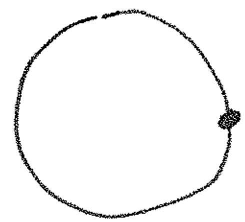
$$e^{-1}(s) = \mathbb{Z} + r \qquad r \in e^{-1}(s)$$

$s \in S^1$ $\qquad$ $r \in \mathbb{R}$ tc $e^{2\pi i r} = s$

- $U \subseteq S^1$ aperto proprio $(U \subsetneq S^1)$

per fissare idee

$U \subseteq S^1 \setminus \{1\}$



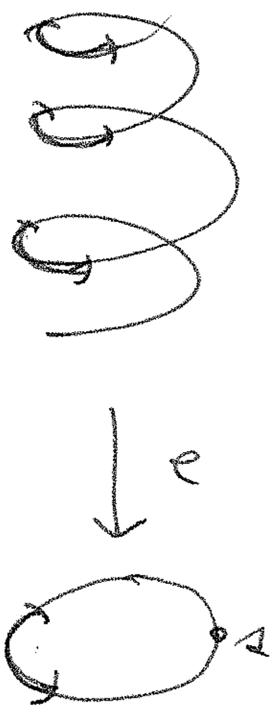
$$e^{-1}(U) = ?$$

$e^{-1}(U) \cap (0,1) = V$ aperto in $(0,1)$

e $e^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (V+n)$

e $e_{|V} : V \to U$

è un omeomorfismo




un tale U spesso si chiama "uniformemente rivestito".

Questa nozione si generalizza nella nozione di rivestimento.

def $X \xrightarrow{f} S^1$ appl. continua

un sollevamento di $f$ è

$\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f = e \circ \tilde{f}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "=" near end, shift right=3] & S^1 \end{tikzcd}$$

ES $\rho_n : I \longrightarrow S^1$
$t \longmapsto e^{2\pi n i t}$

sollevamento di $\rho_n$?

cerco $\tilde{\rho}_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(e \circ \tilde{\rho}_n)(t) = \rho_n(t) = e^{2\pi i n t}$

$$\| \\ e^{2\pi i (\tilde{\rho}_n(t))}$$

$\hat{p}_n(t) = nt$ ci va bene

uniche altre possibilità $\hat{p}_n(t) = nt + k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

Ora verifichiamo che in generale

$\forall$ $\alpha$ laccio in $S^1$ con pto base $1$

$\exists!$ sollevamento (fissando pto base del sollevamento)

<u>Lemma del sollevamento dei cammini:</u>

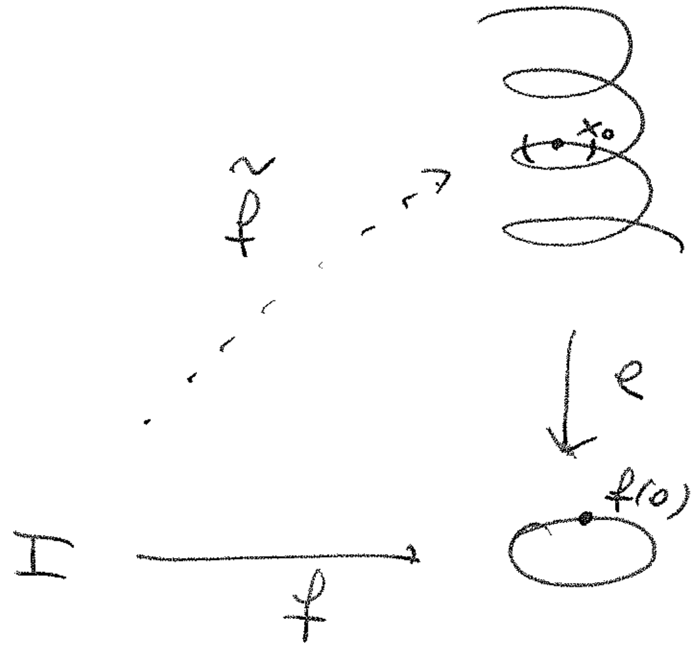
$\forall$ $f : I \longrightarrow S^1$ cammino

$\exists$ $\hat{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sollevamento di $f$

se fisso $x_0 \in e^{-1}(f(0))$ $\exists!$ $\hat{f}_{x_0}$ sollevamento tale che $\hat{f}_{x_0}(0) = x_0$

dim

idea: localmente su aperti su cui $e$ è omeo posso costruire $\tilde{f}$ usando inverso locale di $e$




poi incollo e uso compattezza.

---

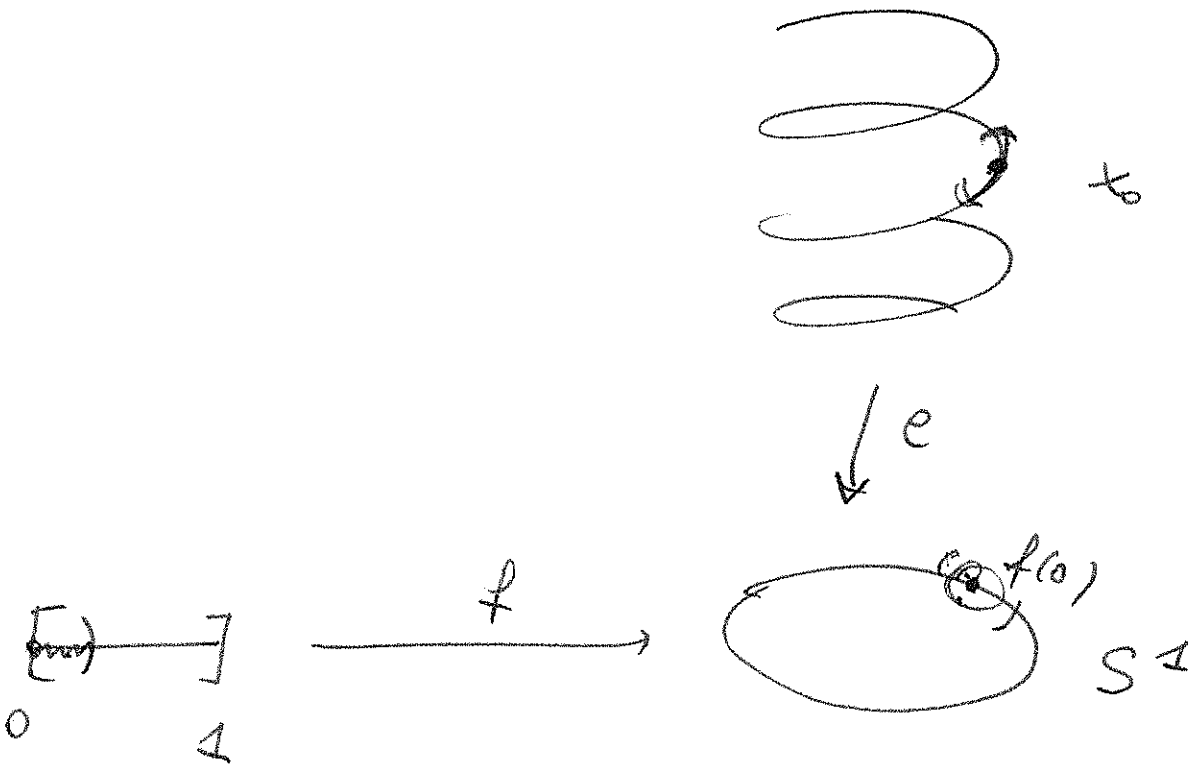
Fatto: $\exists$ partizione di $[0, 1]$

$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$

tale che $\forall \ i = 1, \dots, k-1$

$f([t_i, t_{i+1}])$ è contenuta in un aperto uniformemente rivestito

verifichiamolo:




$\forall x \in S^1$ $\exists$ $U_x$ intorno aperto di $x$ tale che $(U_x)$ è unif. rivestito.

$\{ f^{-1}(U_x)) \ , \ x \in S^1 \}$ è ricoprimento aperto di $I$

<u>OSS</u> ogni $f^{-1}(U_x)$ è unione di intervalli aperti

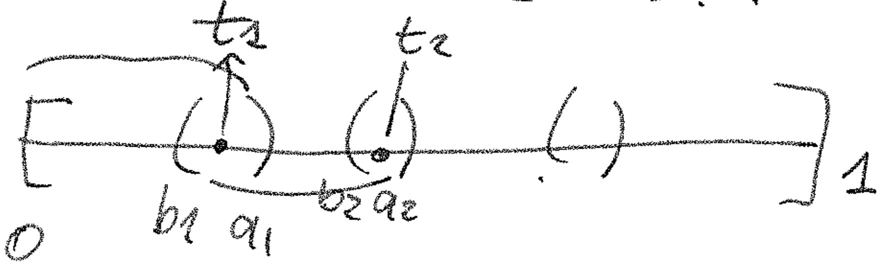
prendo il ricoprimento di $I$ formato da questi intervalli. $\mathcal{A}$

$I$ è compatto $\exists$ sotto ric. finito di $\mathcal{A}$:

$\exists$ $[0, a_1)$ $(b_1, a_2)$ $\dots$ $(b_n, 1]$ tali che

$f$( questi intervalli ) $\subseteq$ aperto unif. rivestito

$a_1 > b_1$ $\quad a_2 > b_2$ $\quad \dots$




$t_i$ fisso $t_i$ $t_c$ $= 1, \dots, n-1$

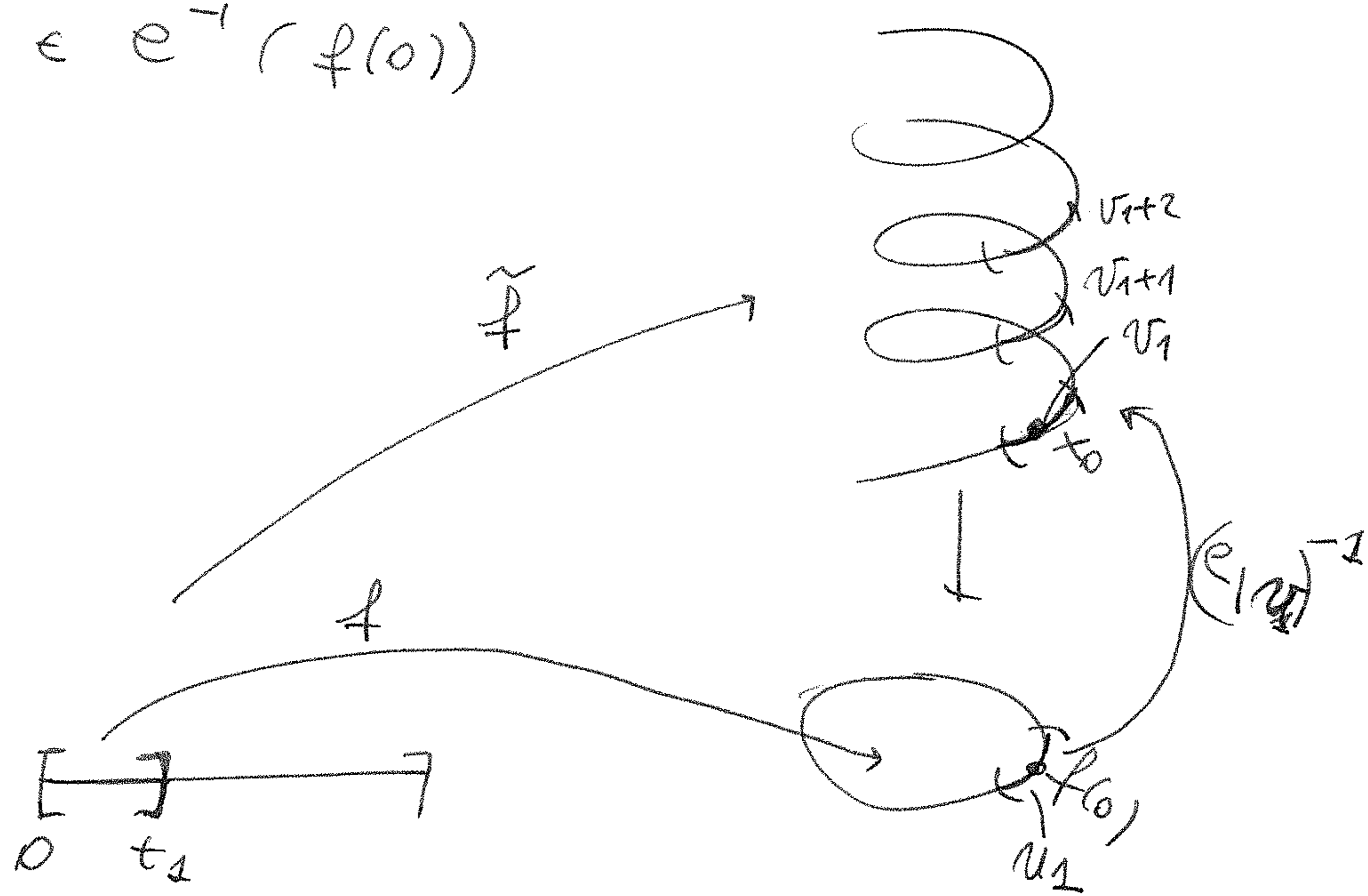
$b_i < t_i < a_i$

$[0, t_1] \subseteq [0, a_1)$ $\quad [t_1, t_2] \subseteq (b_1, a_2)$

la partizione data dai $t_i$ è quella che cerco.

Ora ci siamo: costruiamo $\tilde{f}$

Fissiamo $x_0 \in e^{-1}(f(0))$



12

$$\tilde{f}_{|[0,t_1]}(t) := \left(e^{-1}_{|V_1}\right) \circ f(t) \qquad \boxed{f = e \circ \tilde{f}}$$

$f([0,t_1]) \subseteq U_1 \subseteq S^1$ unif. riv.

$$e^{-1}(U_1) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_1 + n$$

$V_1 \ni x_0$

e notiamo che la definizione su $[0,t_1]$ è forzata (unicità su $[0,t_1]$)

poi prendo $\underline{\tilde{f}_{|[0,t_1]}(t_1)}$ prendo $U_2$ aperto unif. riv.

$$e^{-1}(U_2) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_2 + n$$

$V_2 \ni \tilde{f}_{|[0,t_1]}(t_1)$

e definisco

$$\tilde{f}_{|[t_1,t_2]}(t) := \left(e^{-1}_{|V_2}\right) \circ f(t)$$

anche questa def. è forzata

procedendo così $\forall i = 1, \dots, n-1$

definiamo in modo forzato $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$
sollevamento di $f$ tc $\tilde{f}(0) = x_0$. $\boxtimes$

Dunque Dato $\alpha : I \longrightarrow S^1$ laccio con pto base 1

$e^{-1}(\alpha(0)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ $\quad x_0 = 0$

$\exists!$ sollevamento di $\alpha$ con pto iniziale 0
$\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$

posso considerare $d(\alpha) := \tilde{\alpha}(1)$
"grado di $\alpha$"

Devo vedere che $d$ definisce applicazione

$$\bar{d} : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

cioè che lacci equivalenti hanno sollevamenti 
equivalenti.

**Lemma di sollevamento delle omotopie**

$F : I \times I \longrightarrow S^1$ appl continua

$\exists\ \tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ sollevamento di $F$

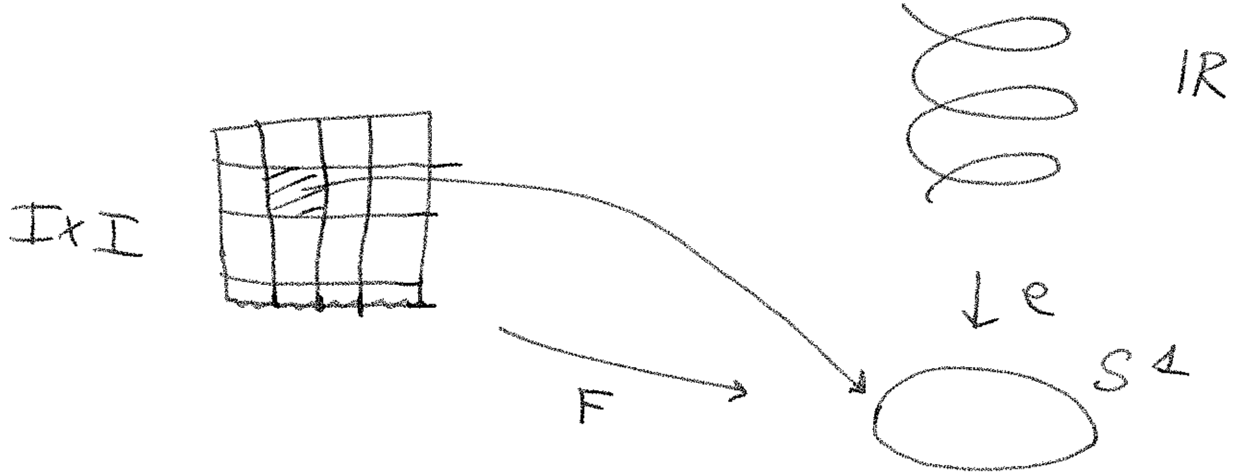
Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $F((0,0)) = e(x_0)$

$x_0 \in e^{-1}(F((0,0)))$

$\exists!\ \tilde{F}$ sollevamento di $F$ tale che

$$\tilde{F}((0,0)) = x_0$$

**Idea della dim** :




<u>Fatto</u>: (analogo a Fatto nella dim. lemma precedente)

$\exists\ t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$

$s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1$

partizioni di $[0,1]$ tali che

$\forall\ i = 1, \dots, k-1$
$\quad j = 1, \dots, m-1$

$$F([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$$
$$\cap$$
aperto uniformemente rivestito

verificate il fatto per esercizio

Fatto questo, possiamo definire $\tilde{F}$ "a pezzi" in un numero finito di passi: come nel lemma precedente

$$\tilde{F}_{|[0,t_1]\times[0,s_1]} = ?$$

$F([0,t_1]\times[0,s_1]) \subseteq U_1$ int. unif. riv.

Sia $V_1$ unico aperto in $\mathbb{R}$ tc

$$V_1 \ni x_0 \quad e \quad e^{-1}(U_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (V_1 + n)$$

$$\tilde{F}_{|[0,1]\times[0,s_1]}(s,t) := (e_{|V_1})^{-1}(F(s,t))$$

e così via ... $\boxtimes$

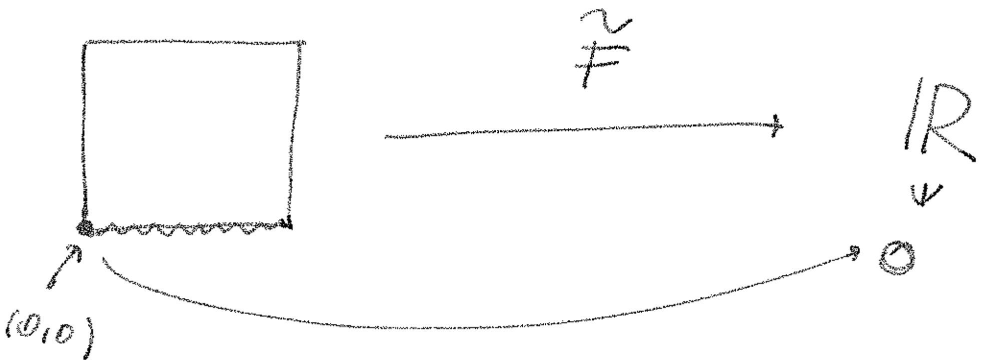
Quindi dati $\alpha \sim \alpha'$ lacci in $S^1$ con pto base 1

$\exists \ F : I \times I \longrightarrow S^1$ omot. tra $\alpha$ e $\alpha'$ relativa a $\{0, 1\}$

( voglio vedere che $\tilde{\alpha}_0 \sim \tilde{\alpha}'_0$ )

prendo $\tilde{F}$ l'unico sollevamento di $F$

tc $\tilde{F}(0,0) = 0$

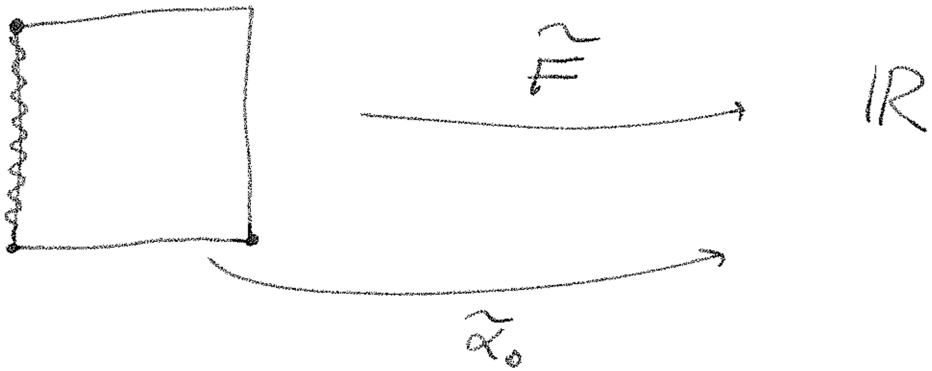



$e(\tilde{F}(s.t)) = F(s.t)$

In particolare $\tilde{F}(s,0)$ è cammino in $\mathbb{R}$

tale che
$$e(\tilde{F}(s,0)) = F(s,0) = \alpha(s)$$
$$\text{e} \quad \tilde{F}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F}(s,0) = \tilde{\alpha}_0(s)$$




$\tilde{F}(s,1)$ è sollevamento di $\alpha'$

con punto di partenza $\tilde{F}(0,1)$

Osservo che $\forall t \in I \quad e(\tilde{F}(0,t)) = F(0,t) = 1$

$$\Rightarrow \tilde{F}(0,t) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

$$\tilde{F}|_{\{0\}\times I} : \{0\}\times I \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{0\}\times I \text{ connesso} \\ \tilde{F}(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{F}(\{0\}\times I) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(0,1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{F}(1,1) \text{ è } \tilde{\alpha}'(1)$$

Allo stesso modo osserviamo che $\tilde{F}(\{1\}\times I)$ anch'esso è un unico punto di $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{F}(1,0) = \tilde{\alpha}_0(1) \\ \hat{F}(1,1) = \tilde{\alpha}_0'(1)\end{array}\right] \Longrightarrow \underbrace{\tilde{\alpha}_0(1) = \tilde{\alpha}_0'(1)}$$

e quindi anche abbiamo che $\tilde{F}$ è equivalenza di cammini tra $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_0'$

Riassumendo: la funzione grado passa al quoziente

$$\bar{d}: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\alpha] \longmapsto d(\alpha) = \tilde{\alpha}_0(1)$$

<u>Teo</u> $\underbrace{\bar{d} \text{ è un isomorfismo di gruppi}}$

<u>dim</u>:

- $\bar{d}$ è suriettivo: lo sappiamo già:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad d(\rho_n) = n$$
$$\parallel$$
$$\bar{d}([\rho_n])$$

- $\bar{d}$ è omomorfismo di gruppi

$\forall [\alpha], [\beta] \in \pi_1(S_1, 1)$

$$\bar{d}([\alpha][\beta]) \overset{?}{=} \bar{d}([\alpha]) + \bar{d}([\beta])$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\bar{d}([\alpha * \beta]) \qquad\qquad \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1)$$

$$\parallel$$

$$\widetilde{\alpha * \beta}_0(1)$$

$\widetilde{\alpha * \beta}_0$ è l'unico sollev. di $\alpha * \beta$ con punto iniziale $0$

$$\underline{\tilde{\alpha}_0(2t)} \qquad \widetilde{\alpha * \beta}_0(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_0(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ ?? \ \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}(1)}(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

punto chiave:

$$\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}(1)}(t) = \tilde{\beta}_0(t) + \underbrace{\tilde{\alpha}_0(1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

infatti

$$e(\tilde{\beta}_0(t) + \tilde{\alpha}_0(1)) = e(\tilde{\beta}_0(t)) = \beta(t)$$

$$\text{e} \quad \tilde{\beta}_0(0) + \tilde{\alpha}_0(1) = \tilde{\alpha}_0(1)$$

$\longrightarrow$ è sollevamento di $\beta$ con pto base $\tilde{\alpha}_0(1)$

per unicità è proprio $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}(1)}(t)$

quindi

$$\widetilde{(\alpha * \beta)}_0(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_0(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\beta}_0(2t-1) + \tilde{\alpha}_0(1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{(\alpha * \beta)}_0(1) = \tilde{\beta}_0(1) + \tilde{\alpha}_0(1)$$

$$\overline{d}([\alpha * \beta]) = \overline{d}([\alpha]) + \overline{d}([\beta])$$

<u>ES.</u> $\left( \rho_n * \rho_m(t) = \rho_{n+m}(t) \right)$

L'ultima verifica da fare è che $\overline{d}$ è iniettivo.

$$\ker \overline{d} = \{ [\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \text{ tc } \underbrace{\overline{d}([\alpha])}_{= \tilde{\alpha}_0(1)} = 0 \}$$

$\alpha$ tc $[\alpha] \in \ker \overline{d}$

è tale che $\tilde{\alpha}_0$ il suo sollev. con pto iniziale $0$

ha punto finale $0$

$$\tilde{\alpha}_0(0) = 0 = \tilde{\alpha}_0(1)$$

ma $\tilde{\alpha}_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è laccio

allora è equivalente a $\varepsilon_0$

$\exists$ omot. rel. a $\{0, 1\}$ fra $\tilde{\alpha}_0$ e $\varepsilon_0$ in $\mathbb{R}$

$e \circ F$ è omot. rel a $\{0,1\}$ tra

$$\underbrace{e \circ \hat{\alpha}_0}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\alpha}} \quad e \quad \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \sim \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad [\alpha] = [\varepsilon_1]$$

$$\Rightarrow \ker \bar{d} = \{ [\varepsilon_1] \}$$

$\Rightarrow \bar{d}$ è iniettivo

$\boxtimes$

$\bar{d}$ è dunque un isomorfismo tra

$\pi_1(S^1, 1)$ e $\mathbb{Z}$.