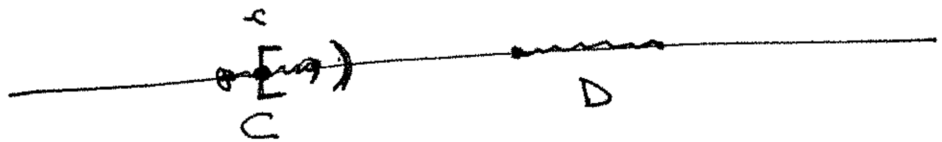
<u>Esercizio</u>, $(\mathbb{R}, \tau_S)$ è normale $= (T4 + T1)$

"separo chiusi disgiunti" — punti chiusi

- Che sia T1 sappiamo già: Ad esempio perché $\tau_e \subseteq \tau_S$
- normalità la dimostriamo direttamente

base per τ_S: Siano C, D chiusi disgiunti

$\{[a, b), a < b\}$



Osserviamo: dato $c \in C$

$c \notin D$ $\quad$ $\mathbb{R} \setminus D$ <u>aperto</u> e contiene c

$$\exists\, \varepsilon_c > 0 \quad [c, c+\varepsilon_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$$

$$\mathcal{U} = \bigcup_{c \in C} [c, c+\varepsilon_c) \in \tau_S \qquad C \subseteq \mathcal{U}$$

$\forall d \in D$ fisso $\delta_d > 0$ t.c. $[d, \delta_d + d) \subseteq \mathbb{R} \setminus C$

$$V = \bigcup_{d \in D} [d, d+\delta_d) \in \tau_S \qquad D \subseteq V$$

$$U \cap V = \emptyset \ ?$$

siano $c \in C$ $d \in D$

$$[c, c+\varepsilon_c) \cap [d, d+\delta_d]$$

se non fosse $\emptyset$ avrei ~~one~~

uno contiene c oppure d (vel) $\boxed{\text{ok}}$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

La retta di Sorgenfrey dunque è normale!

OSS D'altra parte

$$(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S) = (\mathbb{R}^2, \tau_S^2)$$

(*) possiamo dimostrare che non è normale, usando il fatto che $\{(x, -x), x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ha la topologia relativa che è discreta (visto)

questo ci dice che 1) τ_S non si conserva per prodotto

2) $(\mathbb{R}, \tau_S)$ non è metrizzabile! Se lo fosse $(\mathbb{R}^2, \tau_S^2)$ sarebbe metrizzabile, quindi sarebbe normale!

(*) vedremo: Munkres pag 198

TOPOLOGIA QUOZIENTE

Questione: $\underset{\text{sp. topologico}}{X} \xrightarrow{f} Y$ insieme

$$f_* \tau_X := \{ V \subseteq Y \text{ tc } f^{-1}(V) \in \tau_X \}$$ "topologia indotta da f sul codominio"

$* \cap \mathcal{P}(Y)$

verifica che è topologia:

(I) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ok $\emptyset \in f_* \tau_X$

$f^{-1}(Y) = X$ ok $Y \in f_* \tau_X$

(II) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fam. di elementi di $f_* \tau_X$:

$$f^{-1}(U_\alpha) \in \tau_X \quad \forall \alpha \in A$$

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \overset{?}{\in} f_* \tau_X \iff f^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \overset{?}{\in} \tau_X$$

$$\overset{\shortparallel}{\bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(U_\alpha)}_{\in \tau_X}} \qquad \underline{\text{ok}}$$

III a) vai

lemma $f_* \tau_X$ è la più grande top. possibile su Y che rende continua f:

dim: sia $\mathcal{S}$ topologia su Y che rende f continua

allora $\forall\, v \in \mathcal{S}$ $\quad f^{-1}(v) \in \tau_X \implies v \in f_* \tau_X$

$\implies \mathcal{S} \subseteq f_* \tau_X$

<u>def</u>: se $f: X \to Y$ è appl suriettiva da (X, τ_X) sp. topologico a Y insieme

$f_*\tau_X$ si dice topologia <u>quoziente</u>
(su Y)

<u>def</u>: $X \xrightarrow{f} Y$ appl continua suriettiva tra spazi topologici si dice identificazione se $\tau_Y = f_*\tau_X$

(se Y ha la topologia quoziente indotta da f)

<u>OSS</u> <u>utile</u> $f: X \to Y$ con X sp. top. e considero $f_*\tau_X$ su Y
f suriettiva

insiemi saturi $S \subseteq Y$ $\quad f^{-1}(S) \subseteq X$

$$f(f^{-1}(S)) = S$$ per suriettività di f

def
un insieme della forma $f^{-1}(S)$ per qualche $S \subseteq Y$ si dice saturo in X (rispetto a f)

$T \subseteq X$ se faccio $f^{-1}(f(T))$ è più piccolo sottoinsieme saturo che lo contiene "la saturazione di T"

Considero gli aperti di X

se $U \subseteq X$ è aperto saturo: $\underbrace{f^{-1}(f(U)) = U}$

per def di $f_* \tau_X$ $\quad \underline{f(U) \in f_* \tau_X}$

OSS 1 l'immagine di aperti saturi è aperta

D'altra parte se $\mathcal{U} \in f_* \tau_X$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{U})$ è aperto saturo in X

$f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$

<u>OSS 2</u>:

$$f_* \tau_X = \{ f(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ è aperto saturo in } X \}$$

<u>Lemma</u>, sia $f: X \to Y$ tra sp. top. suriettiva e continua

a) se f è <u>aperta</u> $\Rightarrow$ è un'identificazione <u>aperta</u>

b) se f è <u>chiusa</u> $\Rightarrow$ " " " <u>chiusa</u>

<u>dim</u> (a) τ_X e τ_Y topologie su X e Y

<u>Tesi</u>: se f è aperto ($f(\mathcal{U}) \in \tau_Y$ $\forall\, \mathcal{U} \in \tau_X$)

allora $\tau_Y = f_* \tau_X$

verifichiamola: sappiamo che siccome f è continua

$\Rightarrow \quad \tau_Y \subseteq f_* \tau_X$

prendo $V \in f_* \tau_X \iff \underbrace{f^{-1}(V)}$ è aperto in X

$f(f^{-1}(V)) \in \tau_Y$ perché f è aperta per ipotesi

$\|$ → f suriettiva

V

$\Downarrow$

$V \in \tau_Y \quad \boxed{\text{ok}}$

<u>oss</u> insiemisticamente

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\
Z &
\end{tikzcd}
$$

f suriettiva

X, Y, Z insiemi

f, g, applicazioni

quando $\exists\ h: Y \to Z$ tale che $\underline{h \circ f = g}$

<u>NOTAZIONE</u> h rende il diagramma $(*)$ commutativo

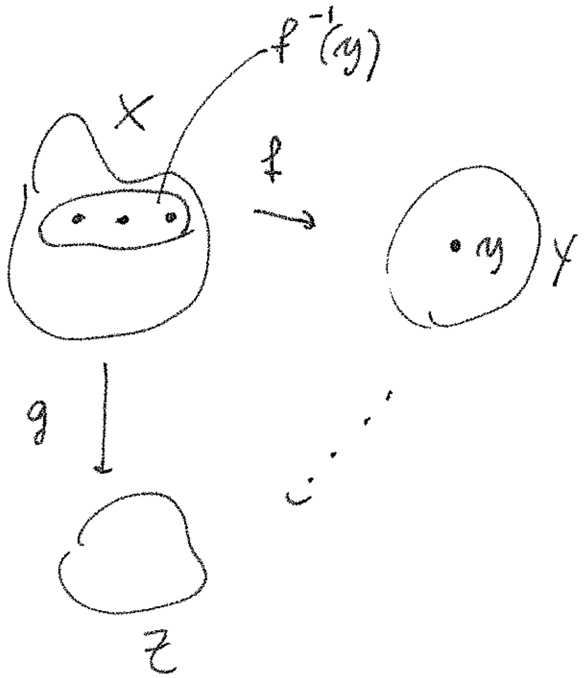
cosa significa:

se h esiste deve valere $\forall x \in X$

$$h(f(x)) = g(x)$$

come posso definirla: ~~a~~ $y \in Y$

$$h(y) = ?$$



se h esiste

deve valere $h(y) = g(x) \quad \forall x \in f^{-1}(y)$

quindi in particolare

condizione necessaria per $\exists h$:

g sia costante su $f^{-1}(y) \quad \forall y \in Y$

NOTAZ: $f^{-1}(y)$ controimmagine di un punto y
si chiama *fibra* su y

condizione necessaria: g sia costante sulle fibre di f

D'altra parte se g è costante sulle fibre di f ($\forall y$)
allora posso definire $h(y) := g(x) \quad x \in f^{-1}(y)$
h è ben definito e fa commutare il diagramma

inoltre h se esiste è *unica*

ora passiamo alla topologia: X, Y, Z sp top.

considero

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

f, g continue e f suriettiva

$\exists!\, h$ tale che $g = h \circ f$

$\Updownarrow$

g è cost. sulle fibre di f

Quando posso sapere se h è continua?

se su Y ho la top. quoziente ho una bella risposta:

TEO: proprietà universale della topologia quoziente:

nelle ipotesi sopra, supponiamo che f sia identificazione (cioè che $\tau_Y = f_* \tau_X$)

Allora vale che

$\forall\, g : X \to Z$ appl continua

$\exists!\, h : Y \to Z$ continua tc $f \circ h = g$

se e solo se g è costante sulle fibre di f!

dim: sappiamo che g cost. sulle fibre è equivalente a $\exists!\, h$ insiemisticamente.

Rimane da vedere che se h esiste è continua:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

h continua

$\Updownarrow$

$\forall\, W \in \tau_Z$
$h^{-1}(W) \in \tau_Y \overset{IP}{=} f_*\tau_X$

$\Updownarrow$

$$\forall\, W \in \tau_Z \quad \underbrace{f^{-1}(h^{-1}(W))}_{= g^{-1}(W)} \in \tau_X$$

☒

OSS: si chiama proprietà universale perchè caratterizza completamente la topologia $f_*\tau_X$:

se $\mathcal{S}$ è topologia su Y che soddisfa la proprietà del teorema:

$$
\begin{tikzcd}
(X, \tau_X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (Y, \mathcal{S}) \arrow[dl, dashed, "h"] \\
(Z, \tau_Z) &
\end{tikzcd}
$$

$\exists!\, h$ continua sse g è costante nelle fibre di f

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{S} = f_*\tau_X}$$

OSS 1) $X \times Y$ prodotto di spazi top

$p: X \times Y \longrightarrow X$ è suriettiva continua e aperta

quindi $\tau_X = p_*(\tau_{X \times Y})$

2) $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ $\qquad S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ $\qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

è continua suriettiva

e : appl esponenziale

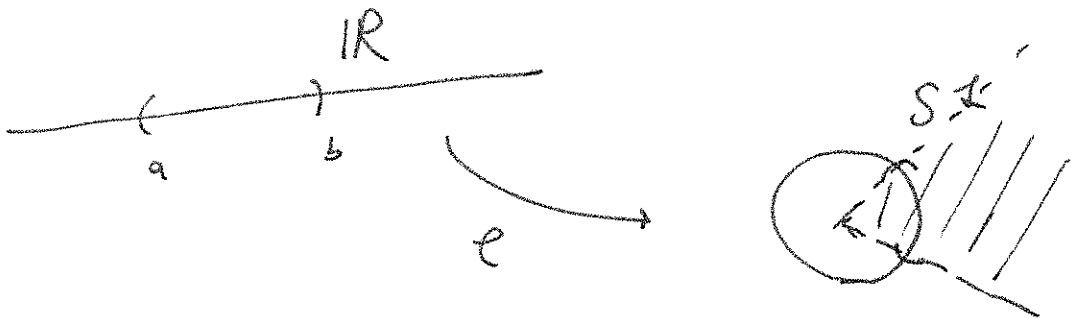
$e(t) = e^{2\pi i t} \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$= \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$

è aperta:

Basta vedere che

l'immagine di elementi di una base sono aperti



$e((a,b))$ è un arco di circonferenza aperto:

$=$

$S^1 \cap$ cono aperto compreso tra retta fra $(0,0)$ e $(\cos(2\pi a), \operatorname{sen}(2\pi a))$

convesso $\qquad$ e $(0,0)$ e $(\cos(2\pi b), \operatorname{sen}(2\pi b))$

$\Rightarrow$ è è una identificazione aperta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & S^1 \\ \tau_e & & \tau_e = e_* \tau_e \end{array}$$

Esercizio (illuminante):

$[0,1] \xrightarrow{e} S^1$ continua e suriettiva

ed è un'identificazione chiusa

$(0,1] \xrightarrow{e} S^1$ continua e suriettiva

ma non è un'identificazione.