

16 gennaio 2018 (1)

X sp. topologico $x_0 \in X$

Abbiamo definito $\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega_{x_0}}{~}$

gruppo con operazione indotta da concatenazione

NOTAZ: $[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta]$ notazione moltiplicativa

$$[e_{x_0}] =: 1$$

OSS: se considero $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

sappiamo: $\text{id}_S \sim_{\{x\}} \text{cost} = C_{\bar{x}} \quad \forall x \in S$

$\downarrow$
relativamente a $\bar{x}$

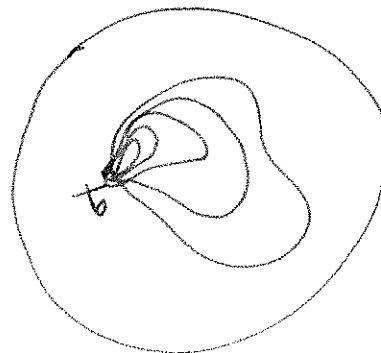
se prendo $\alpha: I \longrightarrow S$ cammino qualunque chiuso

con punto base $x_0 \in S$

Sia $F: S \times I \rightarrow S$

omotopia fra

id_S e c_{x_0}



$$F(x, t) = (1-t)x + tx_0$$

Allora posso prendere

$$H: I \times I \rightarrow S$$

omotopia fra

α e c_{x_0}

$$H(s, t)$$

ii

$$F(\alpha(s), t)$$

ii

$$(1-t)\alpha(s) + tx_0$$

$$\forall s, t \in I$$

(3)

H è quot. fra α e ε_{x_0}

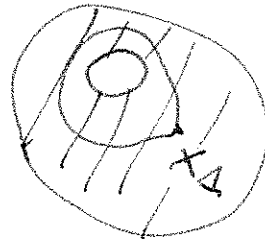
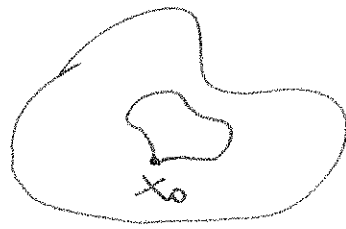
Quindi vale che $\pi_1(S, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$
 $\forall x_0 \in S$ gruppo banale

ES₁: Verificate che X contraibile
 (cioè quot. equiv. a un punto)

$$\Rightarrow \forall x_0 \in X \quad \pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$$

OSS: Come cambia il π_1 se vario il
 punto base?

Se prendo uno spazio X con due componenti connesse per archi C_0, C_1 ④



$x_0 \in C_0$ $x_1 \in C_1$

chiaro:

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C_0, x_0)$$

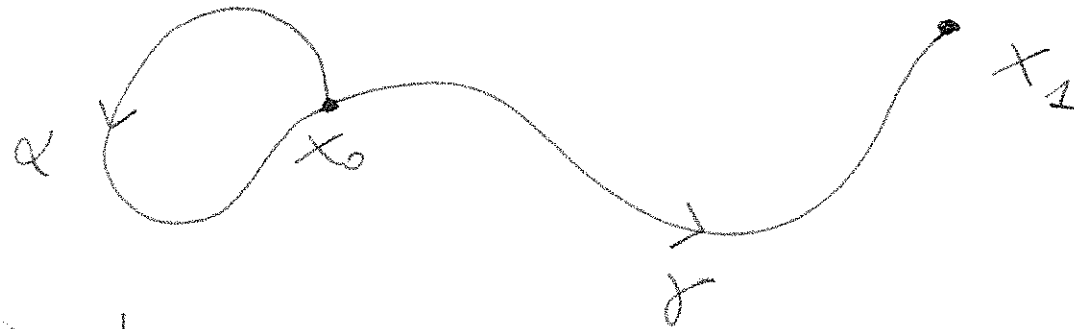
$$\pi_1(X, x_1) = \pi_1(C_1, x_1)$$

Chiaramente questi due spazi non hanno niente a che fare.

Se invece considero $x_0, x_1 \in X$ sp. top.

tali che $\exists \gamma: I \rightarrow X$ cammino t.c. $\gamma(0) = x_0$
 $\gamma(1) = x_1$

(5)



Dato α laaccio con punto base x_0

Possiamo costruire in modo naturale

laaccio con pto base x_1 : $\overline{\gamma} * \alpha * \gamma$

Osservazione

Se $\alpha' \sim \alpha$ $\overline{\gamma} * \alpha' * \gamma \sim \overline{\gamma} * \alpha * \gamma$

(Fate verifica)

$\Rightarrow$ Abbiamo definito una applicazione

⑥

$$\begin{aligned} \mu_\gamma : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

TEO: Con le notazioni precedenti,
 μ_γ è un isomorfismo di gruppi.

dim

Dobbiamo vedere che $\forall [\alpha], [\beta]$

$$\mu_\gamma([\alpha][\beta]) = \mu_\gamma([\alpha]) \mu_\gamma([\beta]) \quad \overset{\pi_1(X, x_0)}{=}$$

($\Rightarrow \mu_\gamma$ è omomorfismo di gruppi)

⑦

$$\mu_x([\alpha][\beta]) = \mu_x([\alpha * \beta]) =$$
$$= [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = \bigcirc \star$$

$$\mu_x([\alpha])\mu_x([\beta]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma][\bar{\gamma} * \beta * \gamma] =$$
$$= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha][\underbrace{\gamma * \bar{\gamma}}_{= [E_x]} * \beta * \gamma]$$
$$= [\bar{\gamma} * \alpha][\beta * \gamma] =$$
$$= [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = \bigcirc \star$$

D'altra parte:

(8)

$$\mu_{\bar{f}} : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[\alpha] \longmapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]$$

immediato vedere che

$$\mu_{\bar{f}} \circ \mu_{\gamma} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$\mu_{\gamma} \circ \mu_{\bar{f}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$$

$$[\alpha] \xrightarrow{\mu_{\gamma}} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \xrightarrow{\mu_{\bar{f}}} [\gamma * (\bar{\gamma} * \alpha * \gamma) * \bar{\gamma}]$$

||

$$[\gamma * \bar{\gamma}] [\alpha] [\gamma * \bar{\gamma}]$$

$$[E_{x_0}']$$

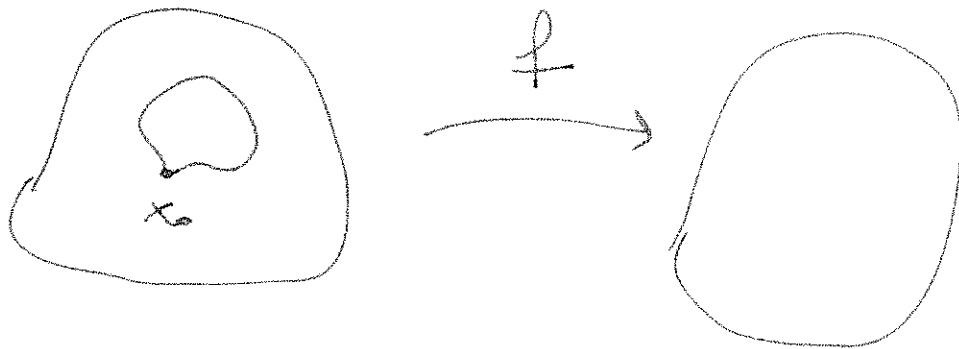
$$[E_{x_0}']$$

COR Se X è connesso per archi

$$\forall x, y \in X \quad \pi_1(X, x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isomorfismo} \\ \text{di gruppi}}}{\cong} \pi_1(X, y)$$

Cosa possiamo fare quando abbiamo

$f: X \longrightarrow Y$ funz. continua
tra spazi topologici



Sia $x_0 \in X$

Dato $\alpha: I \longrightarrow X$ laccio con pto base x_0 (10)

pono prendere $f \circ \alpha: I \longrightarrow Y$

laccio con pto base $f(x_0)$

Se prendo $\alpha \sim \alpha'$

$H: I \times I \longrightarrow X$ isotopia rel. a $\{0, 1\}$
tra α e α'

allora $f \circ H: I \times I \longrightarrow Y$

è quot. relativa a $\{0, 1\}$ tra

$f \circ \alpha$ e $f \circ \alpha'$

è ben definita

(11)

applicazione

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$$

$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

Teo f_* è un omomorfismo di gruppi
che si chiama omomorfismo indotto da f
dim prendo $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) \stackrel{\text{def}}{=} [f \circ (\alpha * \beta)] = \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*([\alpha])f_*([\beta]) \end{aligned}$$

Proprietà importantissime di questo
omomorfismo :

Prop : vale che : $\forall X \text{ sp top } \forall x_0 \in X$

- $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$
 - $\forall \underset{Z}{Y} \text{ sp top } \quad \forall \underset{\text{cont. gof.}}{f: X \rightarrow Y} \quad \forall \underset{\text{cont.}}{g: Y \rightarrow Z}$
- $$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Z, g(f(x_0)))
 \end{array}$$

vale che

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

$$\text{dim}_1: X \xrightarrow{\text{id}_X} X$$

(13)

$$\bullet \forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \quad (\text{id}_X)_* [\alpha] \stackrel{\text{def}}{=} [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha] \quad \text{OK}$$

$$\begin{aligned} \bullet (g_* \circ f_*) [\alpha] &= g_* (f_* [\alpha]) = \\ &= g_* [f \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = \\ &= [(g \circ f)(\alpha)] = (g \circ f)_* [\alpha] \end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo

$$(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

sp top + punto fissato

gruppo

con queste proprietà

appl. continue ~~tra~~ omomorfismi
di gruppo

in modo che

id ~~tra~~ omom. fisso
identico

$f \circ g$ ~~tra~~ $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$

composizione

composizione

queste proprietà hanno il nome di funtorialità

Conseguenze importanti di questi risultati:

COR. Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è omeomorfismo,

allora
 $\forall x_0 \in X \quad \varphi_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$

è un isomorfismo di gruppi.

dim: $X \xrightleftharpoons[\varphi]{\varphi} Y \quad \exists \psi: Y \rightarrow X \text{ continua}$

tale che $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$

$\psi \circ \varphi = \text{id}_X$

$$\Rightarrow \varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, \varphi(x_0))} \quad (16)$$

$\uparrow$ prop 1° punto $\uparrow$ prop. 2° punto

$$\Rightarrow \psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

cioè φ_* e ψ_* sono l'uno l'inverso dell'altro $\square$

Quindi: la classe di isom.

del gruppo fondamentale di uno spazio
 connesso per archi è un invariante
 topologico.

(17)

$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$
 f, g mappe continue tra
spazi topologici

Se $f \simeq g$ allora che relazione hanno

f_* e g_* ? fissato $x_0 \in X$

$$\begin{array}{ccc}
 X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y & \rightsquigarrow & \pi_1(X, x_0) \\
 & & \begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \\
 & \parallel & \downarrow \mu_Y \\
 & & \pi_1(Y, g(x_0)) \\
 & \searrow g_* &
 \end{array}
 \end{array}$$

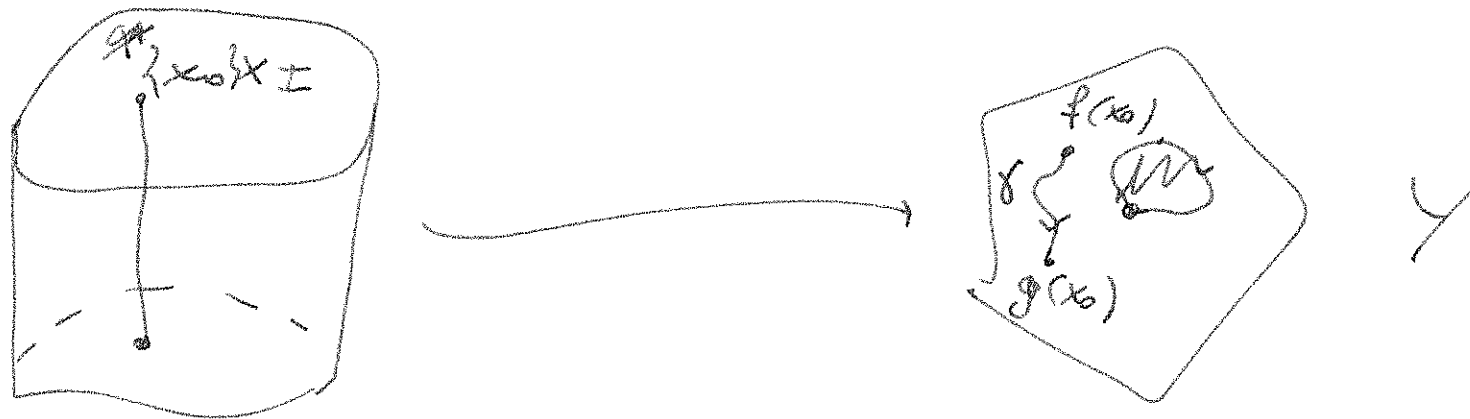
Considero $H: X \times I \longrightarrow Y$ omotopia tra f e g (18)

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

in particolare se considero

$$H(x_0, t) = \gamma(t) \quad \text{e' cammino} \\ \text{tra } f(x_0) \text{ e } g(x_0)$$



Teo Con le notazioni qui sopra, vale che (19)

$$\boxed{\mu_Y \circ f_* = g_*}$$

dim: per esercizio

Cor: Se $X \simeq Y$ (X è omotopicamente
suo $\varphi: X \rightarrow Y$ eq.omot. equivalente a Y)

allora

$$\forall x_0 \in X \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

in particolare,

Se X e Y sono cpa e omot. equiv.

hanno gruppi fondamentali isomorfi.

dim $\varphi: X \longrightarrow Y$ equivalenza oomotopica (20)

$\psi: Y \longrightarrow X$ inversa oomotopica

$$\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_X \quad (*)$$

$$\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_Y$$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0)))$$

Dato γ cammino ridotto dall'omotopia (*)

come da teo luo

$$\begin{aligned} \psi_* \circ \varphi_* &= (\psi \circ \varphi)_* = \mu_{\overline{\gamma}} \circ (\text{id}_X)_* \\ &= \mu_{\overline{\gamma}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_*$ iniettiva, ψ_* suriettiva

altra isotopia da'

(21)

suriettività di φ_* e iniettività di ψ_*

$\Rightarrow$ sono isomorfismi $\square$

Oss: Se X è contrattibile

allora $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\} \forall x_0 \in X$

def X sp. topologico cpa

si dice semplicemente connesso

se $\forall x_0 \in X \quad \pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$

Fatto: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sfere sono sempl. connesse
 $n \geq 2$ ma non contrattibili