15 novembre 2017 1

Proprietà di "separazione" analoghe a T2
X spazio topologico

X T0 : $\forall x,y\in X$ con $x\neq y$ $\quad \exists\, \mathcal{U}\in\tau_X$ tc $x\in\mathcal{U}$ e $y\notin\mathcal{U}$ oppure (vel) $\exists\, \mathcal{V}\in\tau_X$ tc $y\in\mathcal{V}$ e $x\notin\mathcal{V}$

$y\notin\mathcal{U}$ e $x\notin\mathcal{V}$

X T1 : $\forall x,y\in X$ con $x\neq y$ $\quad \exists\, \mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau_X$ tc $x\in\mathcal{U}$, $y\in\mathcal{V}$

X T2 : $\forall x,y\in X$ con $x\neq y$ $\quad \exists\, \mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau_X$ tc $x\in\mathcal{U}$, $y\in\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$

X T4 : $\forall C,D\subseteq X$ chiusi disgiunti

$\exists\, \mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau_X$ tc $\mathcal{U}\supseteq C$ $\mathcal{V}\supseteq D$

e $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$

X T3 : $\forall C\subseteq X$ chiuso $\forall x\notin C$

$\exists\, \mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau_X$ tc $\mathcal{U}\supseteq C$ e $\mathcal{V}\ni x$ ~~e~~ $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$

osservazioni

- $T2 \Rightarrow T1$ chiaro

- Sappiamo: $\underbrace{T2 \Rightarrow \text{i punti sono chiusi in } X}$

vediamo $\underbrace{T1 \Rightarrow \text{i punti sono chiusi:}}$

$x \in X$ $\quad X\ T1$ $\quad$ So: $\forall y \neq x$ (cioè $y \in X \setminus \{x\}$)

$\exists\, U_y, V_y \in \tau_X$ tc $x \in U_y$ $\underbrace{y \in V_y}$

$\underbrace{x \notin V_y}$ $\quad y \notin U_y$

cioè $V_y \subseteq X \setminus \{x\}$

$y \in$

quindi $X \setminus \{x\}$ è aperto! (cioè ~~$\{x\}$~~ x chiuso)

Viceversa se in X i punti sono chiusi

cosa posso dire? Dati $x, y \in X$ con $x \neq y$

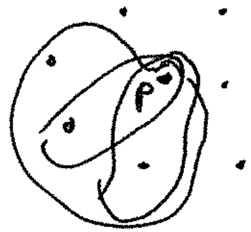
$X \setminus \{x\}$ intorno aperto di y che non contiene x

$X \setminus \{y\}$ " " " x " " " y

Quindi se i punti sono chiusi $\Rightarrow X$ è T1

<u>OSS.</u> $T_1 \Rightarrow T_0$ chiaro

Esempio di spazio T0 che non è T1



X insieme con $|X|>1$

$p \in X$ punto fissato $\quad \tau = \{ S \subseteq X \text{ t.c. } p \in S \} \cup \{\emptyset\}$

(per. es: è topologia)

(X, τ) non è T1 (né quindi T2):

per qualunque $\underset{x \in X}{x \neq p}$, $\forall\, U \in \tau$ t.c. $x \in U \Rightarrow p \in U$.

<u>però</u> è una topologia T0 !

$\forall\, x, y \in X$ con $x \neq y$ se $x \neq p$, $y \neq p$

posso prendere $\underset{\tau}{\{x, p\}}$ e $\underset{\tau}{\{y, p\}}$ soddisfano T_0

se per esempio $y = p$ non ho un intorno di x che non contiene p (non è T_1)

ma $\underset{p}{X \setminus \{x\}} \in \tau$ per def. di τ.

<u>OSS</u> p è denso in X $\Rightarrow$ $\overline{\{p\}} = X$

<u>ES</u> X è $T0$ $\Leftrightarrow$ punti distinti hanno chiusure distinte

<u>ES</u> (X, e) $\forall\, x \in X$ $\overline{\{x\}} = X$

OSS importante: se X è $T2$ (in part.) i punti sono chiusi:

$T2$ dice: separo questi particolari chiusi che sono i punti.

In uno spazio $T3$ non so a priori se i punti sono chiusi!

Esistono spazi $T3$ non $T2$?

Chiaro: $\underbrace{T1 + T3 \Rightarrow T2}$

Anche $\underbrace{T4 \Rightarrow T2}$

chiaro $\underbrace{T4 + T1}_{\text{NORMALE}} \Rightarrow \underbrace{T3 + T1}_{\text{REGOLARE}} \Rightarrow T2 \Rightarrow T1 \Rightarrow T0$

$\boxed{\text{ES}}$ X metrizzabile è normale

OSS. Tutte queste proprietà sono proprietà topologiche:

se $X \sim Y$ $\quad X$ soddisfa T_i sse Y soddisfa T_i

per esercizio

PROP.: • se $Y \subseteq X$ e X è T_i allora $(Y, \tau_{X|Y})$ è T_i

• se X e Z sono T_i $\Rightarrow$ $X \times Z$ è T_i $\forall i = 0, \dots, 4$

per esercizio

ES importante : $(\mathbb{R}, \tau_S)$ è normale

Topologia quoziente

oss $\underbrace{X}_{\substack{\text{insieme} \\ \cancel{\text{spazio topolog}}}} \xrightarrow{f} \underbrace{Y}_{\text{spazio top.}}$ def. $f^{-1}(\tau_Y) = \{ f^{-1}(U),\ U \in \tau_Y \}$

è top. su X

visto

Domanda naturale:

$\underset{\text{sp. top}}{X} \xrightarrow[f]{} \underset{\text{insieme}}{Y}$ posso indurre in modo naturale una topologia su Y ?

def $f_* \tau_X = \{ U \subseteq Y$ è aperto sse $f^{-1}(U) \in \tau_X \}$

verifichiamo che $f_* \tau_X$ è topologia su Y