

14 dicembre 2017

④

ESERCIZIO VOLTATO SCORSA:

$$X \text{ localmente connesso} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall x \in X \quad \forall \mathcal{U} \text{ intorno di } x \\ \exists \text{ intorno } \boxed{\text{aperto}} \text{ connesso } U \\ \text{di } x \quad x \in U \subseteq X \end{array} \right) \quad (*)$$

$\boxed{\Leftrightarrow}$
ovvio

oss, su come non si riesce a dimostrare:

$$S \subseteq X \quad S \text{ connesso} \Rightarrow \bar{S} \text{ e-connesso}$$

$$\nRightarrow \overset{\circ}{S} \text{ e-connesso (fare esempi)}$$



vale questo fatto:

$$X \text{ localmente } \underline{\text{compatto}} \text{ connesso} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \text{ ogni } U \subseteq X \text{ aperto} \\ \text{le componenti connessi di } U \\ \text{sono aperte in } X \end{array}$$

dim del fatto

②

$\Rightarrow$ X loc. ~~compatta~~ connesso

Sia $U \subseteq X$ aperto Sia $A \subseteq U$ una comp. connessa di U

Sia $x \in A$.

~~(voglio)~~

Voglio: A è un intorno di x

U è intorno di x . Per la connessione locale

$\exists V$ int. di x connesso contenuto in U

$$V \subseteq U$$

connesso

$$+ V \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow V \subseteq A$$

$\downarrow$
perché
 A è
comp. connessa

$$\left[\begin{array}{l} A \cup V \text{ è connesso} \\ \text{e contiene } A \\ \Rightarrow A \cup V = A \end{array} \right]$$

$\Rightarrow A$ è aperto.

⊞ interpretando

③

vale che $\forall U \subseteq X$ aperto le sue componenti connesse sono aperte. Voglio dim. che X è localmente connesso

Sia $x \in X$ sia $\mathcal{N}$ intorno di x :

$\exists U$ aperto t.c. $x \in U \subseteq \mathcal{N}$

prendo A comp. connesse di U che contiene x

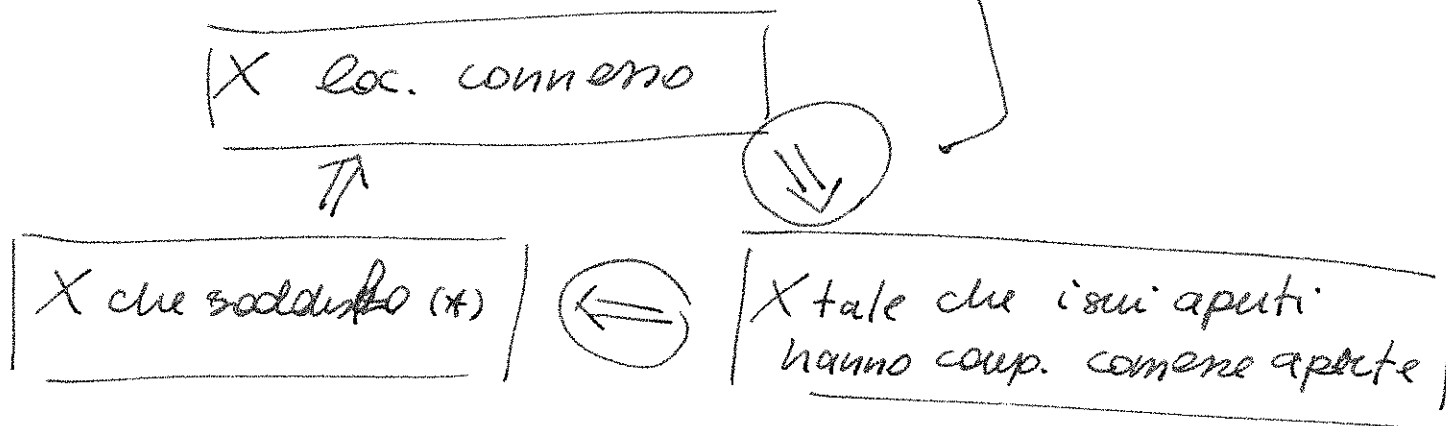
A è aperto connesso e $x \in \underbrace{A}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$

$\Rightarrow X$ è loc. connesso

ATTENZIONE!

Auxilio dimostrato che vale *

Questo dim. dunque ci dà le implicazioni:



Lemma: X sp. topologico B base per la topologia

(4)

X compatto $(\Rightarrow) \left[\begin{array}{l} \forall \text{ rivestimento i cui elementi appartengono a } B \\ \text{esiste un sottoricoprimento finito} \end{array} \right] \textcircled{c}$

dim $(\Rightarrow)$ ovvio

$(\Leftarrow)$ Supponiamo valga $\textcircled{c}$

Prendo $\mathcal{A}$ rivestimento aperto di X

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists \begin{array}{l} B_{\alpha \in I_A} \in B \text{ t.c.} \\ \text{famiglia di indici t.c.} \\ \bigcup_{\alpha \in I_A} B_{\alpha} = A \end{array}$$



considero

$\mathcal{F} := \left\{ B_{\alpha} \quad , \quad \alpha \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} I_A \right\}$ è ricoprimento aperto di X composto da elementi di B

$\Rightarrow$ estraggo un sottoricoprimento finito

$B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_k}$ elementi di questo sottoric

⑤

$$\alpha_i \in I_{A_i} \quad B_{\alpha_i} \subseteq A_i \in \mathcal{A}$$

Allora

$$X = B_{\alpha_1} \cup \dots \cup B_{\alpha_k} \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k \subseteq X$$

$\Rightarrow \{A_1, \dots, A_k\}$ è sottoric. finito di $\mathcal{A}$ $\square$

ES ^{per esercizio /}
 X spazio ~~compatto~~ T_2 $K \subseteq X$ compatto ($\Rightarrow$ visto ieri) chiuso

$$x \in X \setminus K \quad \exists U, V \text{ aperti di } X \text{ t.c.}$$

$$U \supseteq K \quad x \in V \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset$$



OSS se X è compatto e T_2

Allora $\forall C \subseteq X$ chiuso visto che è compatto.

$\forall x \in X \setminus C \quad \exists U, V$ aperti t.c. $U \supseteq C \quad V \ni x \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset$ (6)

per esercizio è sopra $\Rightarrow X$ è T_3

(in effetti è $T_3 + T_1 =$ regolare)

TEO Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua suriettiva
Se X è compatto $\Rightarrow Y$ è compatto.

SLOGAN: immagine continua di compatto è compatta.

COR la compattezza è una proprietà topologica.

dim Sia A un ricoprimento $X \xrightarrow{f} Y$
aperto di Y . Voglio estrarne
un sottoricoprimento finito.

considero $f^{-1}A := \{ f^{-1}(A), A \in A \}$

è una famiglia di aperti in X

$\hookrightarrow$ poiché f è continua

$$\text{noetre } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = f^{-1}(Y) = X$$

⑦

estraggo un sottoinsieme finito di $f^{-1}\mathcal{A}$ per compattare X :

$$\exists A_1 \dots A_k \text{ t.c. } f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_k) = X$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$f^{-1}(A_1 \cup \dots \cup A_k)$$

Dunque

$$f\left(f^{-1}(A_1 \cup \dots \cup A_k)\right) = f(X) = Y$$

$$\parallel$$

$$A_1 \cup \dots \cup A_k$$

□

Teo: X compatto Y T_2 f continua $X \xrightarrow{f} Y$

Allora f è chiusa.

dim: $C \subseteq X$ chiuso

so che C è compatto (chiuso in un compatto)

$\Rightarrow f(C)$ è un compatto per teo precedente

uno $\neq$ compatto in T_2 è chiuso!

Quindi $f(C)$ è chiusa. $\square$

Cor: se X compatto Y T_2 $f: X \rightarrow Y$ continua
biettiva

$\Leftrightarrow f$ è un omeomorfismo!

Ad es,

$$[0, 1] \xrightarrow{e} S^1$$

abbiamo verificato che
è chiusa

ora lo sappiamo dol teorema

(9)

PROP $f: X \rightarrow Y$ ~~app~~ ^{cioè} identificazione: $\left(\begin{array}{l} f \text{ continuo suriettivo} \\ Y \text{ con top. } f_* T_X \end{array} \right)$
 $X \in T_2$
 Sono equivalenti:

(i) $Y \in T_2$;

(ii) f è chiusa;

(iii) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$

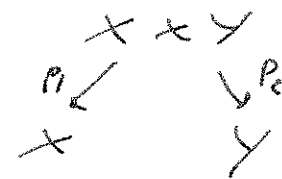
Dimostrazione per esercizio.

TEO se X e Y sono spazi compatti.
 $X \times Y$ lo è.

OSS: 1) anindi per induzione se $X_1 \dots X_n$ sono spazi compatti $X_1 \times \dots \times X_n$ è compatto

2) ovio che vale il viceversa: se $X \times Y$ è compatto

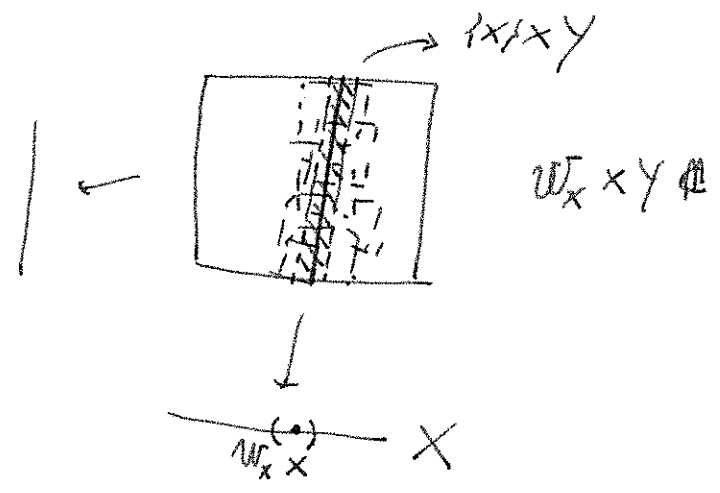
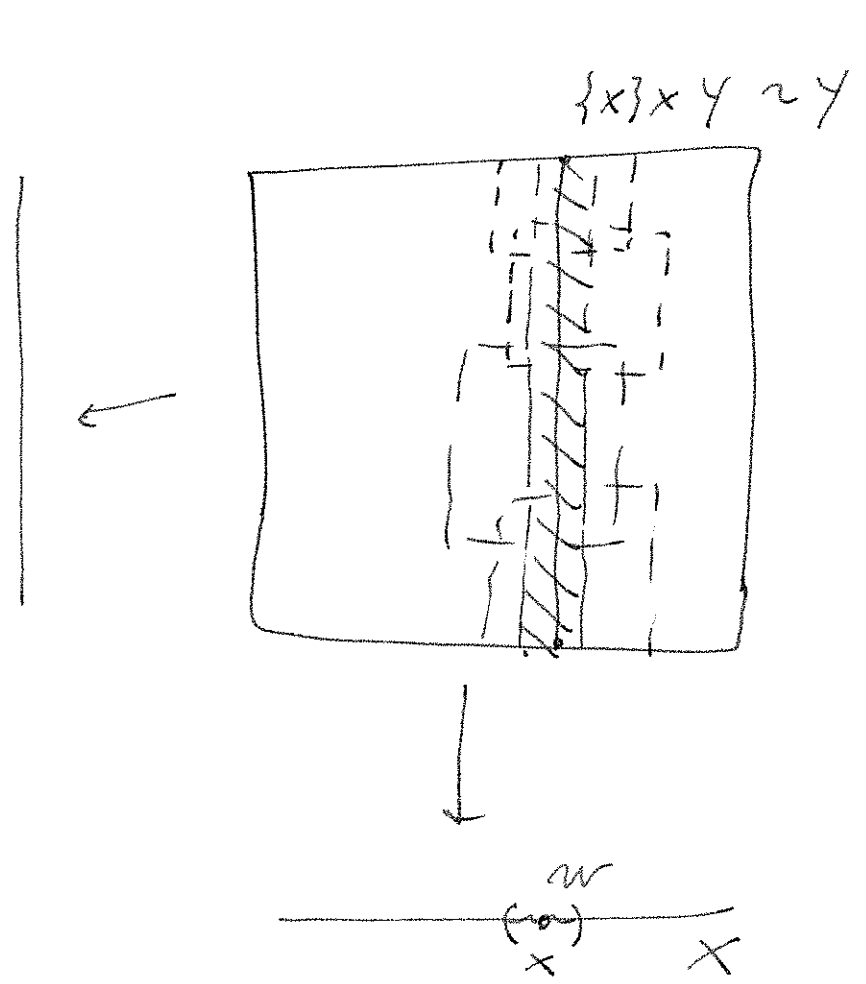
$X = p_1(X \times Y)$ $Y = p_2(X \times Y)$ lo sono



Attenzione: segue Munkres (e Kosniowski)

Dim, Sia A ricoprimento aperto di $X \times Y$

~~possiamo~~ potremmo supporre che $A \subseteq B_{X \times Y}$ base canonica



fisso $x_0 \in X$

Lemma del tubo: $\forall \mathcal{U}$ aperto in $X \times Y$ che contiene
 $\{x_0\} \times Y \quad \exists W$ intorno aperto di x

(17)

talché $W \times Y \subseteq \mathcal{U}$

dim: siano $A_\alpha \times B_\alpha \in \mathcal{B}_{X \times Y}$

talché

$$\bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \times B_\alpha) = \mathcal{U}$$

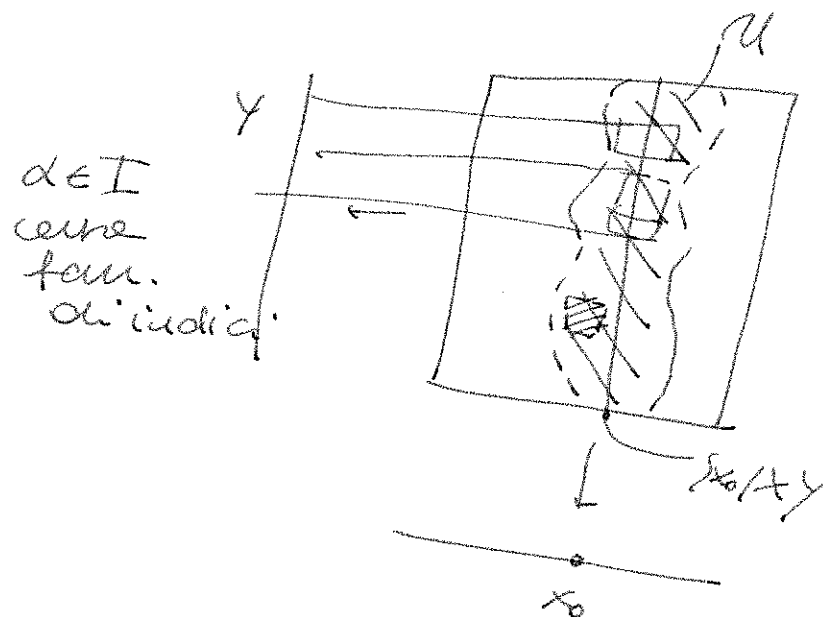
valerò che considero solo gli

$A_\alpha \times B_\alpha$ tali che $x_0 \in A_\alpha$

i B_α sono un ricoprimento aperto di Y

Y compatto $\Rightarrow \exists B_{\alpha_1} \dots B_{\alpha_k}$ che sono ricopr. di Y

$A_{\alpha_1} \times B_{\alpha_1}, \quad A_{\alpha_2} \times B_{\alpha_2} \quad \dots \quad A_{\alpha_k} \times B_{\alpha_k}$ è ricopr. di $\{x_0\} \times Y$



prendo $W := \bigcap_{i=1}^K A_{\alpha_i}$

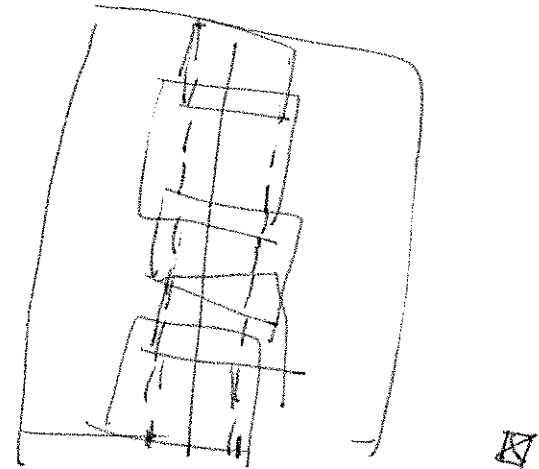
W aperto e contiene x_0

(12)

e per come l'ho scelto

$$W \times B_{\alpha_i} \subseteq A_{\alpha_i} \times B_{\alpha_i} \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$\Rightarrow W \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^K A_{\alpha_i} \times B_{\alpha_i} \subseteq \mathcal{U}$$



ora dimostriamo i teoremi.

X, Y compatti $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $X \times Y$
composto da elementi della base canonica

$\forall x \in X$ fisso $A_1^x \times B_1^x, \dots, A_{K(x)}^x \times B_{K(x)}^x$ finiti tali che $\in \mathcal{A}$

che surcopiano $\{x\} \times Y$

(13)

→ per Lemma del tubo $\exists W_x$ aperto che contiene x e

$$W_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} A_i^x \times B_i^x$$

$\{W_x, x \in X\}$ sono dunque un ricoprimento aperto di X

X compatto. Estraggo sotto ric. finito

che corrisponde a

$$W_{x_1} \dots W_{x_n}$$

$$x_1 \dots x_n$$

ora prendo

$$\left\{ A_{i_r}^{x_r} \times B_{i_r}^{x_r} \right\}_{\substack{r=1, \dots, n \\ i_r=1, \dots, k(x_r)}}$$

questo è ~~più~~ sottoric.

di $\mathcal{A}$: convincerene

