compattezza

<u>def</u>: X spazio topologico. un ricoprimento di X è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tc $\underbrace{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = X}$

un sottoricoprimento di un ricoprimento $\mathcal{F}$ è una sottofamiglia $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tale che

$\mathcal{F}'$ sia un ricoprimento

cioè $\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' = X$

<u>OSS</u>: per ora la topologia non c'entra! È tutto solo insiemistico.

<u>ES</u>: $\{X\}$ è un ricoprimento di X

$\{\{x\},\ x\in X\}$ è un ricoprimento di X

def 1) un ricoprimento / sottoricoprimento di X
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice <u>aperto</u> se $\mathcal{F} \subseteq \tau_X$
cioè se $\forall F \in \mathcal{F}$, $F \in \tau$

2) si dice <u>finito</u> se $|\mathcal{F}| < +\infty$

ES di ricoprimenti aperti:

→ $\{X\}$ $\forall\ (X, \tau_X)$ è ric. aperto e finito

→ (X, d) spazio metrico

$$\mathcal{B} = \{\ B_\varepsilon(x),\ x\in X\ \ {}^{\varepsilon\in\mathbb{R}}_{\varepsilon>0}\}$$ è ricoprimento aperto

$$\cup\!\mid$$

fisso $\bar{x}\in X$ $$\mathcal{B}_1 = \{\ B_\varepsilon(\bar{x}),\ {}^{\varepsilon\in\mathbb{R}}_{\varepsilon>0}\}$$ È un sottoricoprimento?

Verifichiamo che $\mathcal{B}_1$ è un sottoricoprimento (aperto) di $\mathcal{B}$

Devo vedere che $X = \bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(\bar{x})$

cioè che $\forall x \in X \quad \exists \bar{\varepsilon}>0$ tc $x \in B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x})$

certo: se $d(x, \bar{x}) = 0$ allora $x = \bar{x}$ qualunque $\bar{\varepsilon}$ va bene

se $d(x, \bar{x}) > 0$ prendo $\bar{\varepsilon} > d(x, \bar{x})$

$B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x}) \ni x$

Quindi $\bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(\bar{x}) = X$

$\mathcal{B}_2 = \{ B_n(\bar{x}) \ , \ n \in \mathbb{N}^+ \}$ anche questo è sottoricoprimento!

$\mathcal{B}_3 = \{ B_\varepsilon(\bar{x}) \ , \quad \varepsilon \leq M \}$ per qualche $M > 0$

allora $\displaystyle\bigcup_{B_\varepsilon(\bar{x}) \in \mathcal{B}_3} B_\varepsilon(\bar{x}) = B_M(\bar{x})$ $\rightarrow$ non è detto che sia tutto X !

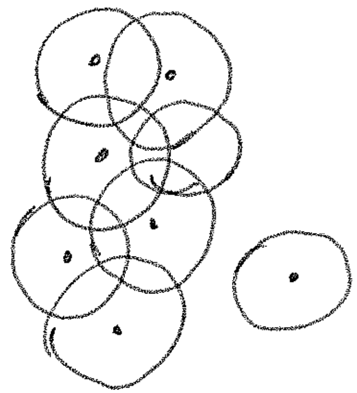
per esempio per $X = \mathbb{R}^n$, $d = d_e$

$\mathcal{B}_3$ non è un sottoricoprimento.

oss se prendo d metrica discreta e $M > 1$

$\mathcal{B}_3$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{B}$!

$\mathcal{B}_4 = \{ B_1(x) \ , \quad x \in X \}$



$\mathcal{B}_4 \subseteq \mathcal{B}$

$\bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} B = X$ infatti $\forall \tilde{x} \in X \quad \underset{\tilde{x}}{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{B_1(\tilde{x})}} \in \mathcal{B}_u$

<u>def</u> X spazio topologico si dice <u>compatto</u>

se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

<u>Quindi</u>

X non è compatto sse $\exists$ un ricoprimento $\mathcal{A}$ aperto di X

tale che $\mathcal{A}$ non abbia sottoricoprimenti finiti.

<u>Esempi</u>

$\mathbb{R}$ con τ_e : prendo $0 \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{A} = \{(-n, n), n \in \mathbb{N}^+\}$

è ricoprimento aperto

voglio vedere che $\nexists$ sottoricoprimento finito:

sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$

una sottofamiglia

<u>finita</u>

$\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ per un certo $k \in \mathbb{N}^{>0}$

$$F_i \in \mathcal{A} \Rightarrow F_i = (-n_i, n_i) \text{ per certi } n_i \in \mathbb{N}^{>0}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} F_i = \left(-\max_i\{n_i\}, +\max_i\{n_i\}\right) \subsetneq \mathbb{R}$$

<u>stessa cosa</u>: per esercizio: $\mathcal{A} = \{(x-1, x+1),\ x \in \mathbb{R}\}$ è ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.

NOTAZIONE: $Y \subseteq X$ $\quad X$ spazio topologico

Y è connesso $\underset{def}{\iff}$ $(Y, \tau_{X|Y})$ è connesso.

$\forall\ \mathcal{A}$ ric. aperto di Y cioè $\mathcal{A} \subseteq \tau_{X|Y}$ è $\mathcal{A}$ ricoprimento

$\exists$ sotto ric. finito.

$\mathcal{A} \subseteq \tau_{X|Y} \iff \forall A \in \mathcal{A} \quad \exists\, U \in \tau_X$ tc $A = U \cap Y$

posso considerare

$\mathcal{A}' \subseteq \tau_X$ associato ad $\mathcal{A}$ $\quad \mathcal{A}' = \{U\}$.

$$Y \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{A}'} U$$

Y compatto $\iff$ $\forall\, \mathcal{A}' \subseteq \tau_X$ tc $Y \subseteq \bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A'$

$$\boxed{\exists\, \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}' \text{ finito tale che } Y \subseteq \bigcup_{A'' \in \mathcal{A}''} A''}$$

Spesso diciamo $\mathcal{A}'$ ricoprimento aperto di Y

$\mathcal{A}''$ suo sottoricoprimento

Esempio

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ non limitato : $\forall M > 0 \quad S \nsubseteq [-M, M]^n$

Allora S non è compatto

infatti $\forall \; n > 0 \quad S \nsubseteq B_n(0)$

Quindi $\{B_n(0)\}$ è un ricoprimento aperto di S (nel senso delle notazione di prima) che non ammette sottoricoprimenti finiti

Teo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ è compatto.

dim ~~S~~sia $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $[0,1]$
(nel senso della nota precedente)

$\forall A \in \mathcal{A}$ $A \in \tau_e$ in $\mathbb{R}$

$$X := \{ t \in [0,+\infty) \mid [0,t] \text{ è ricoperto da } \# \text{ finito di elementi di } \mathcal{A} \}$$

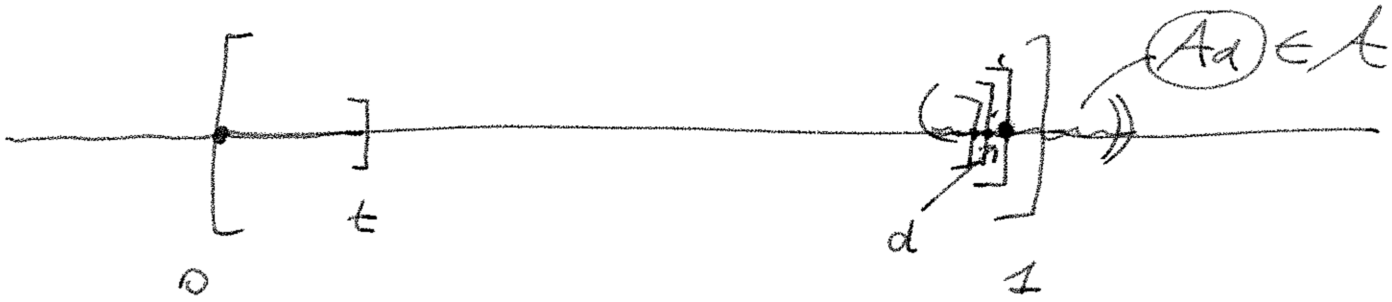
voglio vedere che $\underline{1 \in X}$

Dimostro che $\sup X > 1$. Fatto questo, ho finito, perché se

$$\underbrace{\text{se } \bar{t} \in X \Rightarrow \forall k \le \bar{t} \Rightarrow k \in X}.$$

Suppongo che $\sup X \le 1$

oss: $X \neq \emptyset$ perché $0 \in X$ $[0,0] = \{0\}$ lo posso ricoprire con un elemento di $\mathcal{A}$!



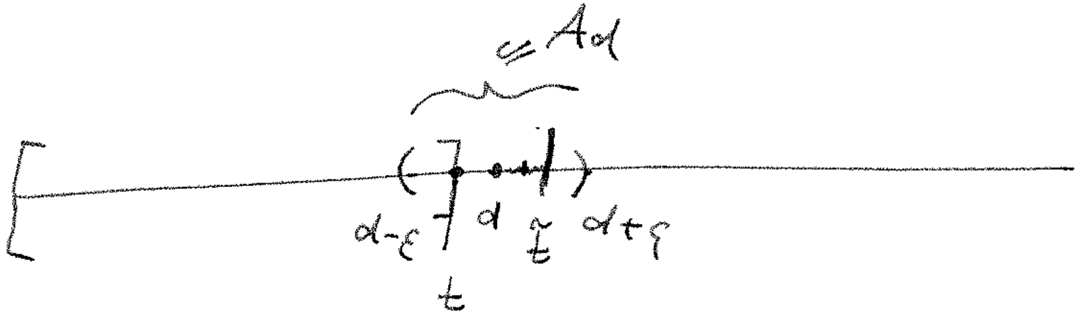
$d = \sup X$ so che $\forall\, t < d$ $[0, t]$ è ricoperto da # finito di elementi di $\mathcal{A}$

e $\forall\, 1 \geq t \geq d$ $[0, t]$ non può essere ricoperto da # finito di elementi di $\mathcal{A}$

sia $A_d \in \mathcal{A}$ che contiene d

(esiste perché ho supposto $d \leq 1$)

$\exists\, \varepsilon > 0$ tc $(d - \varepsilon, d + \varepsilon) \subseteq A_d$



se prendo $d-\varepsilon < t < d$

per la costruzione $[0, t]$ è ric. da # finito di elementi di $\mathcal{A}$

$\exists\ A_1, \dots A_k \in \mathcal{A}$ tc $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \supseteq [0, t]$

Allora però se prendo

$\tilde{t} \in (d, d+\varepsilon)$ $\quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_d \supseteq [0, t] \cup (d-\varepsilon, d+\varepsilon)$

$$\supseteq [0, \tilde{t}]$$

$\Rightarrow \tilde{t} \in X$ e però $\underline{\tilde{t} > d}$ Assurdo

$\boxtimes$

PROP. • 1) chiuso in compatto è compatto;
2) compatto in T2 è chiuso;
3) unione finita di sottospazi compatti è compatta.

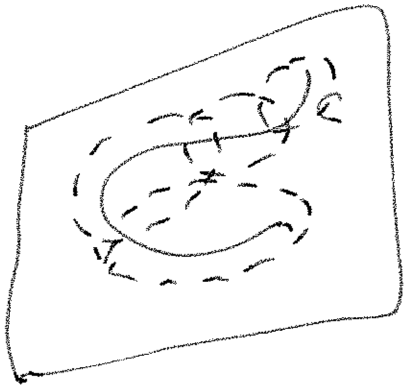
dim

1) Sia X spazio compatto. $C \subseteq X$ c chiuso

Voglio vedere che C è compatto.

Sia $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di C (di aperti di X!):

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \supseteq C \quad e \quad A \in \tau_X \ \forall A \in \mathcal{A}$$



prendo $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{X \setminus C\}$

$\mathcal{A}'$ è ricoprimento aperto di X:

infatti • $X \setminus C$ è aperto perché C è chiuso

• $\bigcup_{B \in \mathcal{A}'} B = X$

13

$$\bigcup_{B \in \mathcal{A}'} B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \cup (X \setminus C) \supseteq C \cup (X \setminus C) = X$$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \supseteq C$$

OK

Estraggo dunque un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}'$ per la compattezza di X.

$\rightsquigarrow \exists A_1 \dots A_k \in \mathcal{A}$ tc

$$A_1 \cup \dots A_k \cup X \setminus C = X$$

$$\Downarrow$$

$$C \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k$$

OK

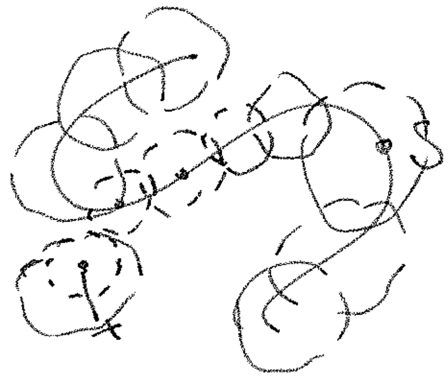
2) un sottospazio compatto in uno spazio T2 è chiuso

oss: se tolgo T2 falso! Basta prendere 1 punto non

<u>dim.</u> $S \subseteq X$ compatto e X T2

voglio: $X \setminus S$ sia aperto

fisso $x \in X \setminus S$



$\forall\, \underline{s \in S}$ $\exists\, U_s, V_s \in \tau_X$

tali che $U_s \ni s$ $\underbrace{V_s \ni x}$ e $U_s \cap V_s = \emptyset$

<u>ora</u> $\{U_s\}_{s \in S}$ sono un ricoprimento aperto di S!

Dunque per la compattezza di S ne estraggo un sottoricoprimento finito:

$$\{U_{s_1}, \dots U_{s_k}\} \quad \text{per certi } s_1, \dots s_k \in S$$

$$k \in \mathbb{N}^{>0}$$

prendo $V := \bigcap_{i=1}^{k} V_{s_i}$ è intorno aperto di x

e $V \cap S = \emptyset$ perché

$$V \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \right)}_{\substack{\cup\mid \\ S}} = \emptyset \quad \text{perché}$$

$\Rightarrow$ $X \setminus S$ è aperto ok

3) $S_1, \dots, S_n \subseteq X$ S_i compatti

$\Rightarrow$ $S_1 \cup \dots \cup S_n \subseteq X$ è sottospazio compatto di X : per esercizio