

11 gennaio 2018

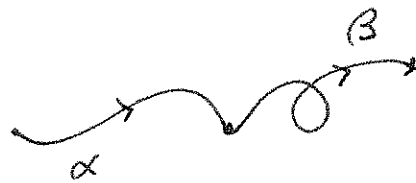
①

Gruppo fondamentale (o primo gruppo di Poincaré)

OSS Abbiamo operazione di giustapposizione di cammini

$$\alpha, \beta: I \longrightarrow X$$

X sp topologico



con $\boxed{\alpha(1) = \beta(0)}$

$\leadsto \alpha * \beta$ cammino tra $\alpha(0)$ e $\beta(1)$

Se fisso $x_0 \in X$

chiamo lacci o cammini chiusi con punto base x_0

i cammini α tali che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

Se prendo $\Omega_{x_0} = \{ \text{lacci con punto base } x_0 \}$

(2)

Ho ben definita una regola

$$\begin{array}{ccc} (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \alpha * \beta \\ \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$$

$$\Omega_{x_0} \times \Omega_{x_0} \longrightarrow \Omega_{x_0}$$



Ho operazione che in pratica non gode di nessuna buona proprietà.

• Non vale neanche la associatività:

$$\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_{x_0}$$

$$\left((\alpha * \beta) * \gamma \right)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\left(\alpha * (\beta * \gamma) \right)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (3)$$

osserviamo che in generale questi due cammini
sono diversi! però c'è una omotopia fra di essi
vedremo

l'idea chiave qui è usare l'omotopia

Def Due cammini $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ si dicono equivalenti
se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$

cioè $\exists$ omotopia $F: \underline{I} \times \underline{I} \rightarrow X$ $\alpha \sim \beta$

talché $F(t, 0) = \alpha(t) \quad \forall t \in I$

$F(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t \in I$

$F(0, s) = \alpha(0) = \beta(0) \quad \forall s \in I$

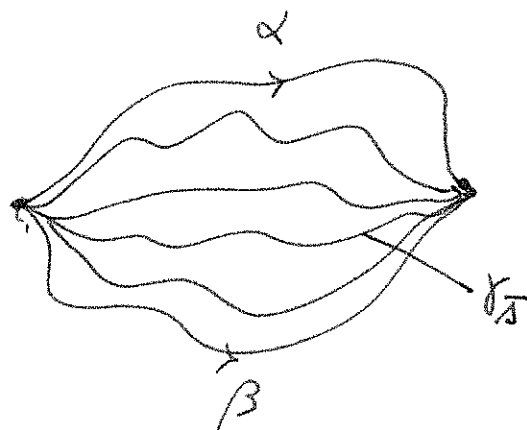
$$F(1, \lambda) = \beta(1) = \alpha(1) \quad \forall \lambda \in I$$

(4)

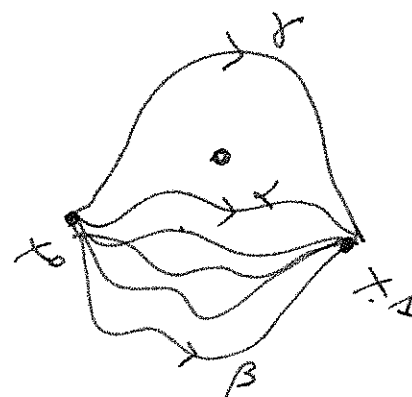
$$\forall \lambda \in I \quad F(t, \lambda) = \gamma_\lambda(t) \quad \text{cammino con } \gamma_\lambda(0) = \alpha(0) \\ \gamma_\lambda(1) = \alpha(1)$$

$$\gamma_0(t) = \alpha(t)$$

$$\gamma_1(t) = \beta(t)$$



ESEMPIO



$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\alpha \neq \gamma$

$\alpha \sim \beta$

$\alpha \sim \beta$
 $\{0, \alpha\}$

$$\frac{\text{IDEA}}{x_0 \in X} \quad \frac{\Omega_{x_0}}{\sim} = \left\{ \text{clomi di equivalenza} \right. \\ \left. \text{dei lacci rispetto all' equivalenza} \right. \\ \left. \text{di cammini} \right\}$$

Voglio vedere che è un gruppo.

(5)

Facciamo un po' di verifiche

~~Sia~~ ~~Es~~ Dato $\bar{x} \in X$ $E_{\bar{x}}: I \rightarrow X$ cammino costante in $\bar{x}$

Lemma

$\forall \alpha: I \rightarrow X$ cammino sia $x_0 = \alpha(0)$ e $x_1 = \alpha(1)$

$$\boxed{E_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * E_{x_1}}$$

dim: verifichiamo la prima equivalenza

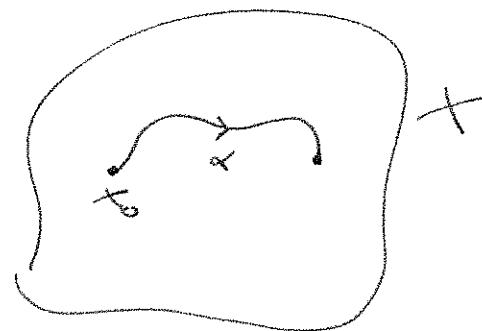
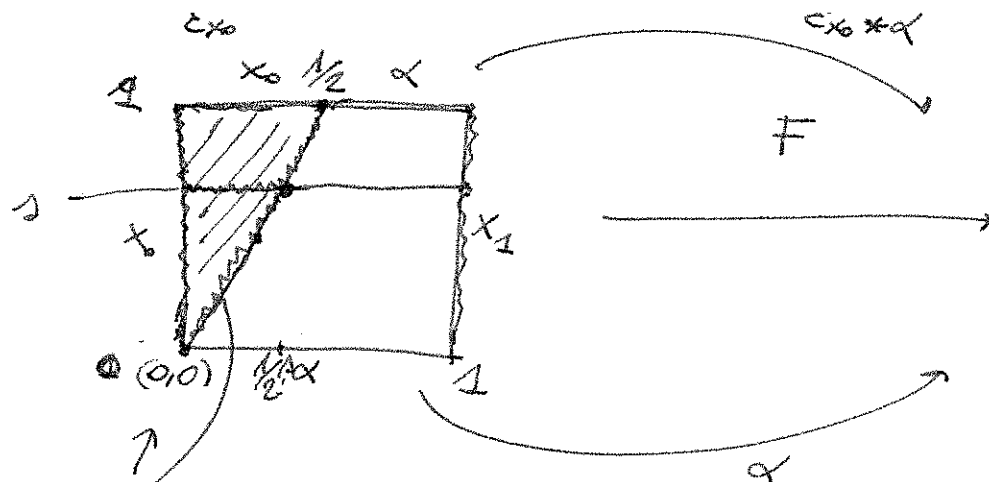
$$(E_{x_0} * \alpha)(t) = \begin{cases} x_0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\alpha(t)$$

voglio omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra questi due cammini

$$F: I \times I \longrightarrow X \quad \text{con le proprietà ...}$$

6



questo disegno ci dà l'idea di come definire l'omotopia

$$y = 2x$$

$$F(t, s) = \begin{cases} x_0 & t \in [0, \frac{1}{2}s] \\ \alpha(at+b) & t \in [\frac{1}{2}s, 1] \end{cases}$$

$$at+b$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$a \frac{1}{2} + b = 0$$

$$b = -a \frac{1}{2}$$

$$t = 1$$

$$a + b = 1$$

$$a + a \frac{1}{2} = 1$$

$$a(1 + \frac{1}{2}) = 1$$

$$a = \frac{2}{2-1} \quad b = -\frac{1}{2-1}$$

(7)

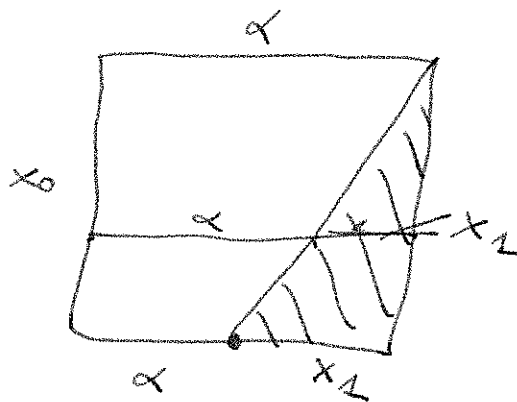
$$F(t, s) = \begin{cases} x_0 & t \in [0, \frac{1}{2}s] \\ \alpha\left(\frac{2}{2-s}t - \frac{s}{2-s}\right) & t \in [\frac{1}{2}s, 1] \end{cases}$$

e' continua e soddisfa le ipotesi richieste

$$\left(\frac{2}{2-s} - \frac{s}{2-s} = \frac{2-s}{2-s} = 1 \right)$$

quindi ok prima omeotopia

$$\alpha \sim \alpha * Ex_1$$



ES: Scrivete le formule esplicite dell'omeotopia.

oss $\forall [\alpha]$ in $\frac{\mathcal{R}}{\sim}$

$\mathcal{R} = \{ \text{tutti i cammini} \}$

$\exists [\varepsilon_{x_0}] [\varepsilon_{x_1}]$

tali che $[\varepsilon_{x_0}] * \alpha = [\alpha] = [\alpha * \varepsilon_{x_1}]$

(8)

Lemma per ogni coppia di cammini compatibili α e β
 $\forall \alpha' \sim \alpha \quad \forall \beta' \sim \beta$

vale che $\boxed{\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'}$

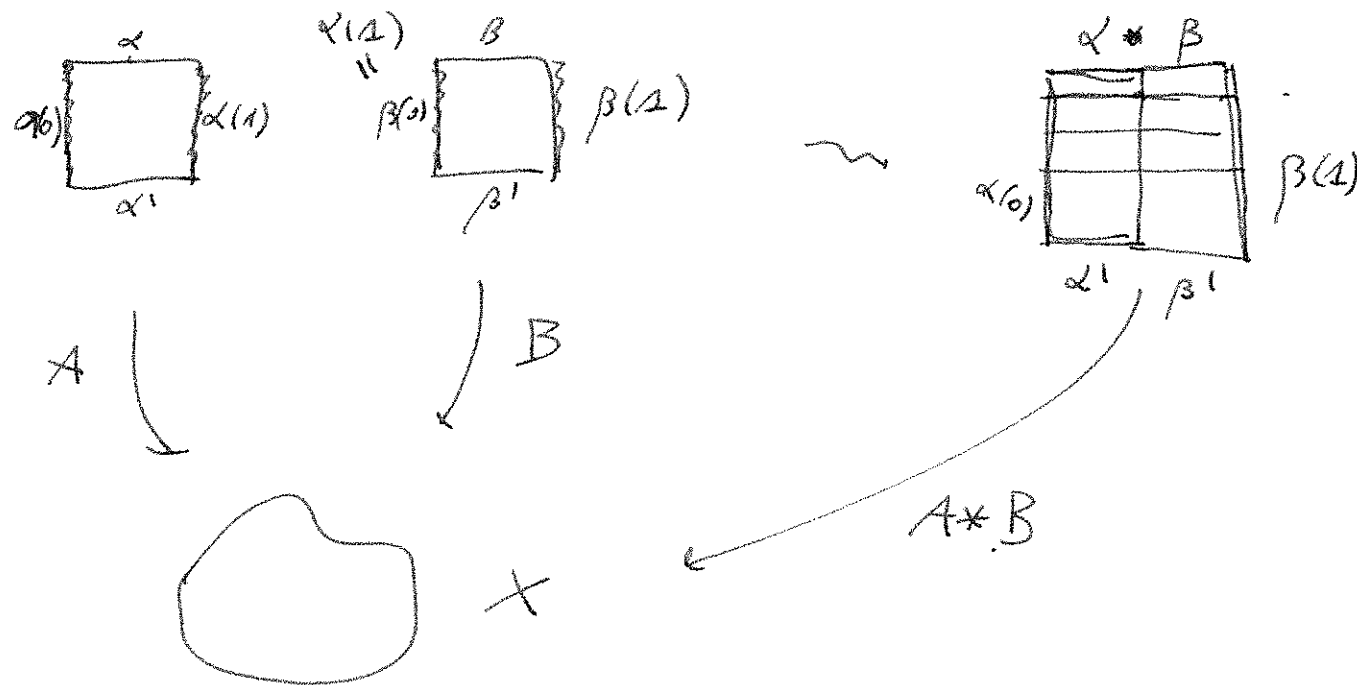
oss:

Questo ci permette di definire
 un'operazione $*$ sulle classi di
 equivalenze

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{voglia:} \\ [\alpha] * [\beta] \\ \hline \parallel \quad \text{buona} \\ \text{def} \\ [\alpha * \beta] \end{array}}$$

dim, $\exists A: I \times I \rightarrow X$ quot. rel. a $\{0, 1\}$ tra α e α'

$\exists B: I \times I \rightarrow X$ " " " " β e β'



Prendendo

$$A * B(t) = \begin{cases} A(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ B(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

omotopia tra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$ relativa a $\{0, 1\}$

Quindi posso scrivere $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$

Quindi il risultato precedente ci dice che se α è cammino fra x_0 e x_1

$$[E_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] * [E_{x_1}]$$

Lemma $\forall \alpha$ cammino tra x_0 e x_1

sia $\bar{\alpha}: I \rightarrow X$ "cammino
opposto"

$$\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$$



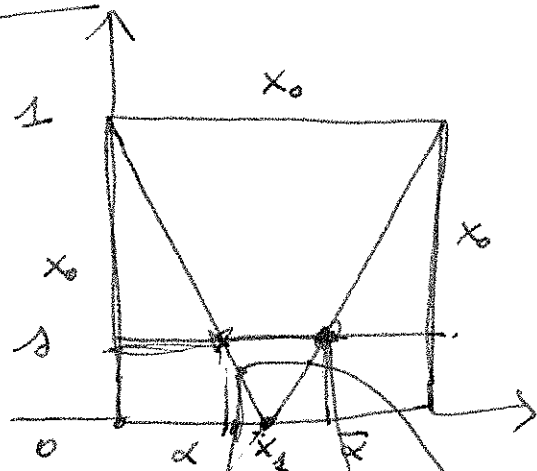
vale che

$$\alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$$

e

$$\bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_1}$$

dim



$$y = -2x + 1$$

$$2x = -y + 1$$

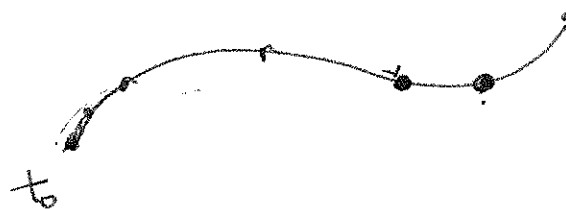
$$x = \frac{-y+1}{2}$$

$$\frac{-1+1}{2}$$

$$\frac{1+1}{2}$$

$$y = 2x - 1$$

$$x = \frac{y+1}{2}$$



Scrivo la omotopia: tra $\alpha * \bar{\alpha}$ e E_{x_0} :

(11)

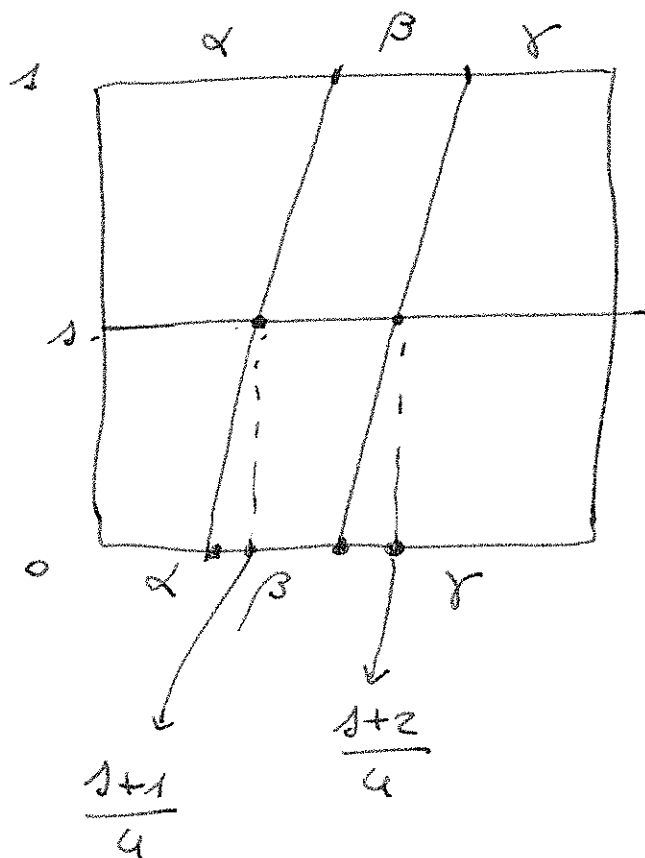
$$F(t, s) := \begin{cases} \alpha(t) & t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha(\frac{1-s}{2}) & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \\ \bar{\alpha}(t) & t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \\ // \\ \alpha(1-t) & \left(t = \frac{1+s}{2} \quad 1-t = \frac{1-s}{2} \right) \end{cases}$$

Rimane da verificare l'associatività!

Lemma: $\forall \alpha, \beta, \gamma$ cammini tali che

$$\alpha(1) = \beta(0) \quad \text{e} \quad \beta(1) = \gamma(0)$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$



idea di come fare

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4}{s+1}t\right) & t \in \left[0, \frac{s+1}{4}\right] \\ \beta\left(4t - s - 1\right) & t \in \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \\ \gamma\left(\frac{4t - s - 2}{2 - s}\right) & t \in \left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \end{cases}$$

$$at + b \quad t.c. \quad t = \frac{s+1}{4} \rightsquigarrow 0 \quad a \frac{s+1}{4} + b = 0$$

$$t = \frac{s+2}{4} \rightsquigarrow 1 \quad a \frac{s+2}{4} + b = 1$$

Mettendo insieme tutti questi risultati:

Teo.

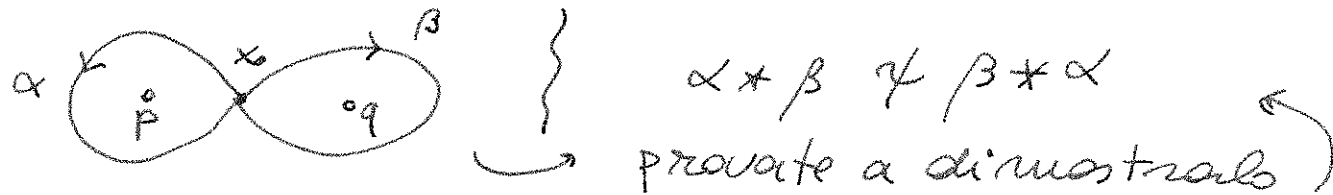
$\frac{\Omega_{x_0}}{\sim}$ è un gruppo con $*$
con $[E_{x_0}]$ elemento neutro

$\forall [\alpha] \in \frac{\Omega_{x_0}}{\sim} \quad [\bar{\alpha}]$ è il suo inverso

$\frac{\Omega_{x_0}}{\sim}$ è il gruppo fondamentale di X con punto base x_0

Notaz. $\underbrace{\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega_{x_0}}{\sim}}$

oss.: In generale non è affatto detto che sia abeliano



in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$