

10 gennaio 2018

①

Topologia algebrica

invarianti numerici degli spazi topologici

$\#$ (comp. connesse)

$\#$ (comp. connesse per archi)

idea della top. algebrica:

associare invarianti algebrici : gruppi anelli, moduli.

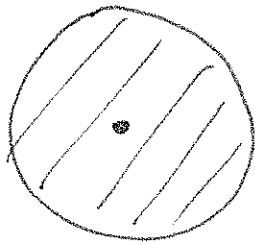
X $\rightsquigarrow$ gruppi.
sp. topologico

caso fondamentale : gruppo fondamentale

Primo concetto fondamentale : OMOTOPIA

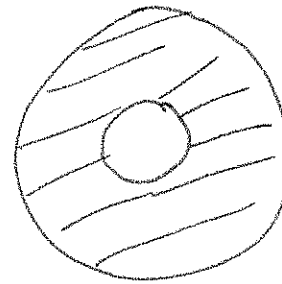
ci permette di definire matematicamente le
deformazione continua di spazi:

(2)



{ "stirato" a un punto

•



non lo posso
"stirare"
a un punto



lo posso
"stirare"
a una circonferenza.

OMOTOPIA

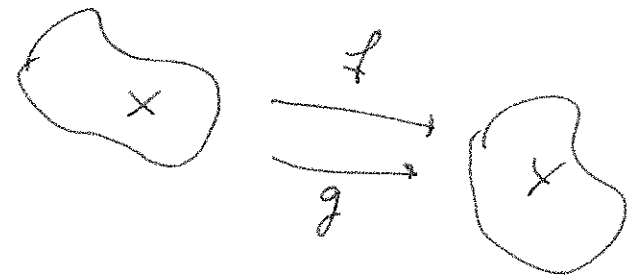


def X, Y spazi topologici

$f, g: X \rightarrow Y$ funzioni continue

omotopia tra f e g :

$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua

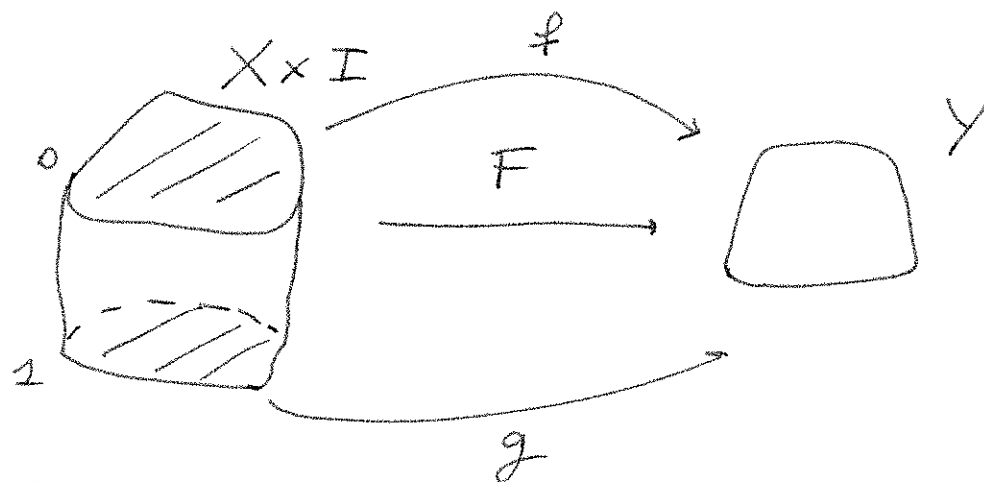


ta le che

$$F(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

(3)



$$\underline{[0, 1] = I}$$

oss

$\forall t \in I$ ho appl $h_t(x) = F(x, t)$

$h_t : X \rightarrow Y$ appl. continue

$$\forall t \quad h_0 \equiv f$$

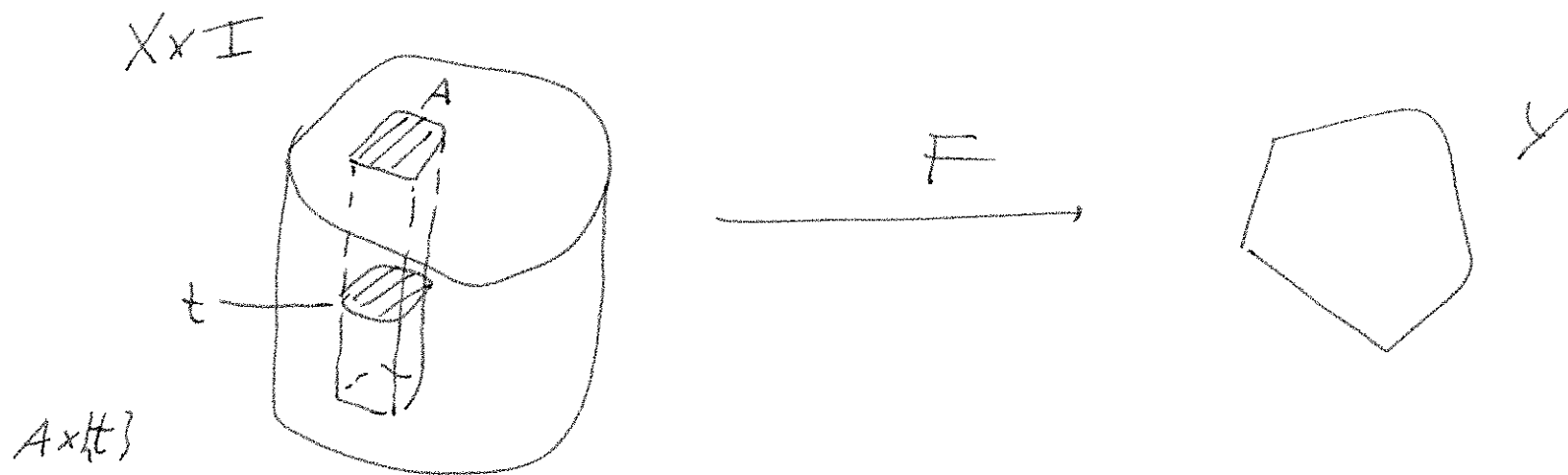
$$h_1 \equiv g$$

"
 h_t "famiglie continue
di applicazioni tra
 f e g "

- se $A \subseteq X$ F omotopia tra f e g
 si dice relativa ad A se

$$\underbrace{F(a, t) = F(a, 0) = F(a, 1)}_{\substack{\parallel \\ f(a) \qquad \parallel \\ g(a)}} \quad \forall a \in A \quad \forall t \in I$$

quindi $f|_A = g|_A$ e tutta F è costante su $\{a\} \times I$
 $\forall a \in A$



Oss importanti:

(5)

- $f: X \rightarrow Y$ f è omotopa a se stessa:

$F: X \times I \rightarrow Y$ omotopia tra f e f :

$$F(x, t) = f(x) \quad \underline{\text{OK}}$$

- Se f è omotopa a g allora g è omotopa ad f

$$\exists F: X \times I \rightarrow Y \quad \text{t.c.} \quad \begin{aligned} F(x, 0) &= f(x) \quad \forall x \in X \\ F(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

continua

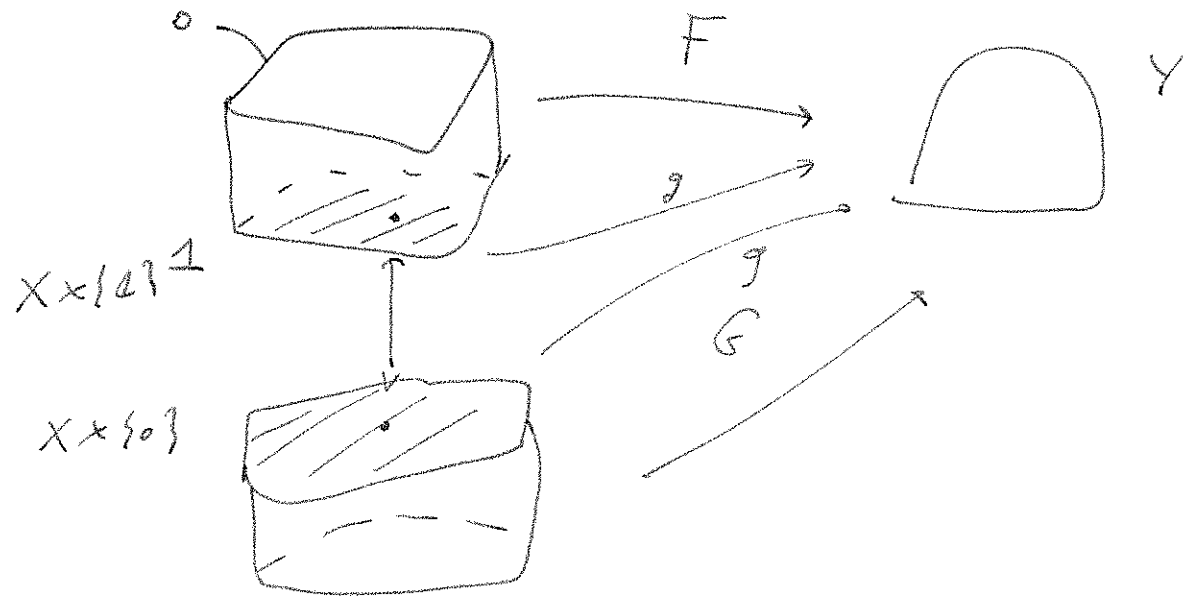
$$G(x, t) := F(x, 1-t) \quad G \text{ è omotopia tra } g \text{ ed } f.$$

- Se f è omot. a g e g è omotopa ad h
 $\Rightarrow f$ è omotopa ad h .

$$\exists F: X \times I \rightarrow Y \quad \text{t.c.} \quad F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

cont.

$\exists G: X \times I \rightarrow Y$ $t \mapsto G(x, t) = g(x) \in G(x, 1) = h(x) \quad \forall x \in X$ ⑥
 cont.



L'unico topico che cerchiamo tra f e h :

$$H(x, t) = "F \times G"(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Per le ipotesi, $F(x, 1) = \overset{= g(x)}{G(x, 0)} \quad \forall x \in X$

Qui sotto questa appl. è ben definita e continua
 è omotopia che cerchiamo.

⑦

PROP: l'omotopia tra funzioni è relazione di equivalenza.

ESERCIZIO importante

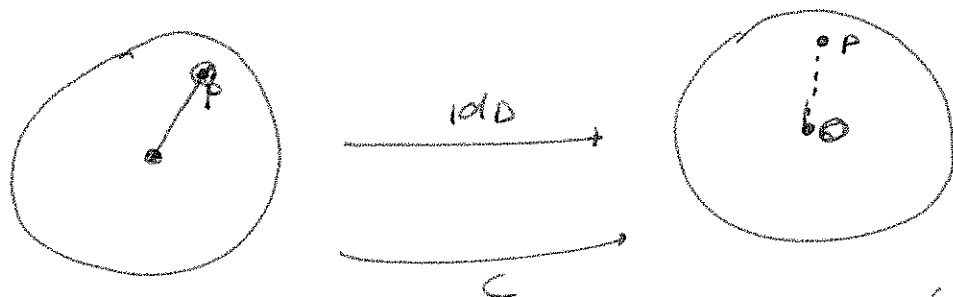
Prendiamo $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (top euclidea)

verifichiamo che id_D è omotopa a $c: D \rightarrow D$

$$c(x, y) = (0, 0)$$

$$\forall (x, y) \in D$$

applicazione
costante



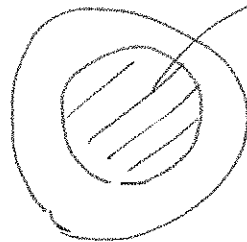
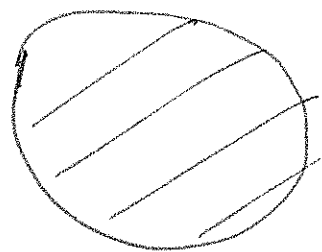
(cerco tra c e id_D per comodità)

cerco $F: D \times I \rightarrow D$ tale che $F(p, 0) = (0, 0) \forall p \in D$
 cont. e $F(p, 1) = p \quad \forall p \in D$

$$F(p, t) = tp$$

$$F((x, y), t) = (tx, ty)$$

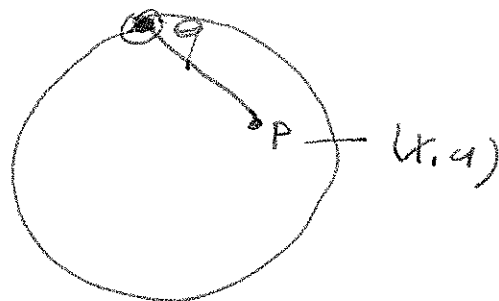
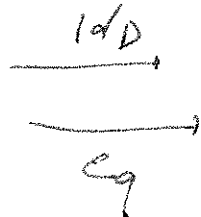
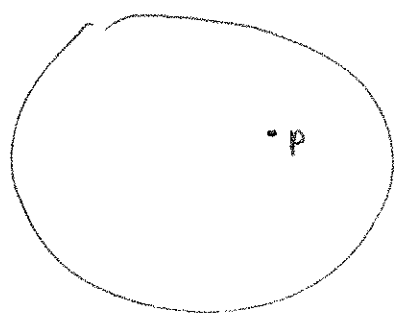
$\forall t$



dischetto
di raggio t

8

E se avessi preso $c_q: D \rightarrow D$ $c_q((x, y)) = q \in D$
con q qualunque?



$$F_q(\underbrace{(x, y)}_p, t) = (1-t)q + tp = (1-t)(x_q, y_q) + t(x, y)$$

ho due topie tra id_D e c_q !

con la stessa verifica vedo che:

$\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$ con S convesso vale che

$\text{id}_S : S \rightarrow S$ è omotopa a qualunque costante
 fissato $q \in S$ $c_q : S \rightarrow S$ $c_q(x) = q$
 $\forall x \in S$

⑨

oss: Quindi ^{in questi esempi} le costanti sono omotope tra di loro
 (per transitività)

ES Dimostrate direttamente che $\forall p, q \in S \subseteq \mathbb{R}^n$
 S convesso
 c_p e c_q sono omotope tra di loro.

ES più in generale in X c_p (convesso per archi)
 le costanti sono omotope tra loro.

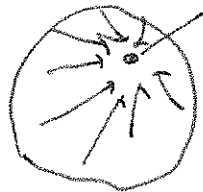
Attenzione come vedremo non è in generale
 vero che un c_p in X abbia id_X omotopa a una costante!

NOTAZ f omotopa a g lo indichiamo $f \sim g$
 f omotopa a g relativamente ad A $f \sim_A g$

OSS visto $F: D \times I \rightarrow D$ omotopia tra c_0 e id_D (10)
 $(p, t) \mapsto pt$

in effetti F è omotopia relativa a $(0, 0)$
 e non è relativa a nessun altro $A \subseteq D$ ($A \neq \{(0, 0)\}$)

ES Costruire omotopia tra c_0 e id_D non relativa
 a nessun sottospazio

Hint:  + omotopia tra c_q e c_0

OSS $c_0 \sim c_1 \sim \dots \sim c_n \sim c_{n+1} \sim \dots$

$$D \xrightarrow{\text{id}} D$$

$$D \xrightarrow{c_0} \{0\} \quad v \in D$$

$$0 \in D$$

$$\{0\} \xrightarrow{i} D$$

come ho visto : $D \xrightarrow{\bar{c}_0} \{0\} \xrightarrow{i} D$

$$\searrow \bar{c}_0 \approx id_D$$

(4)

Abbiamo

$\bar{c}_0$ appl. da D al singoletto
 e i appl. dal singoletto a D $+c$ $i \circ \bar{c}_0 \approx id_D$

D'altra parte $\bar{c}_0 \circ i = id_{\{0\}}$

generalizziamo questa nozione:

Def Due spazi topologici X e Y si dicono
 omotopicamente equivalenti.

se $\exists \varphi: X \rightarrow Y$ $\psi: Y \rightarrow X$ continue
 tali che $\varphi \circ \psi \approx id_Y$ e $\psi \circ \varphi \approx id_X$

Attenzione: se $f \equiv g$ invece di omotopo-
lico def di spazi omeomorfi

(12)

siccome se $f \equiv g \Rightarrow f \approx g$

questa è generalizzazione del concetto di omeomor-
fismo.

D è davvero una generalizzazione. D è omot. equiv.
ad un qualunque suo punto MA ovviamente non
omeomorfo

$$D \xrightarrow{\varphi} \{0\} \xrightarrow{\psi} D$$

$\varphi \circ \psi$ certo non è id_D ma "è famiglia
continua di appl. continue tra $\varphi \circ \psi$ e id_D "

$\Rightarrow \psi$ è "inversa omotopica" di φ

Oss: Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un convesso, allora
 è omotopicamente equivalente a un punto (al singoletto)

ES: Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato allora è omot. equiv. a
 un punto.

def uno spazio topologico X si dice contraibile
 se è omotopicamente equivalente a un punto.

Prop.: X sp top è contraibile se e solo se
 id_X è omotopa a una costante

dim. se X è contraibile:

$\exists \varphi: X \rightarrow \{p\}$ e $\exists \psi: \{p\} \rightarrow X$ ^{continue} $\checkmark$ tali che

$$\varphi \circ \psi \approx \text{id}_p \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi \approx \text{id}_X$$

$$\text{Im } \psi = \psi(p) = \bar{x} \in X$$

equivalentemente:

$$\exists \bar{x} \in X \quad \text{t.c.} \quad c_{\bar{x}}: X \rightarrow X \text{ è omotopa a } \text{id}_X$$

viceversa, se

$$\exists \text{ omotopia } F \text{ tra } \text{id}_X \text{ e } c: X \rightarrow X \text{ costante}$$

$$\text{allora se } \bar{x} = c(x)$$

$$\text{prendo } \varphi: X \rightarrow \{\bar{x}\} \quad \text{e } \psi: \{\bar{x}\} \hookrightarrow X$$

inclusione

verifichiamo le ipotesi di controllabilità. □

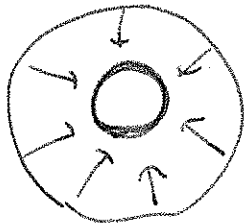
opportunamente tra connesso tra qualunque coppia di punti' ⁽⁷⁶⁾
□

COR In X contraibile id_X è omotopa a
qualunque costante $c_x \quad \forall x \in X$.

OSS: la viceversa nel teorema NON vale:

S^1 è cpa ma vedremo che non è contraibile.

OSS: l'equivalenza omotopica è una relazione
di equivalenza



def Sia X spazio topologico

$$A \subseteq X$$

una retrazione di X in A è

appl. continua $r: X \rightarrow A$ tale che

$$r|_A = \text{Id}_A \quad \left(\text{ovvero se } A \xrightarrow{i} X \quad r \circ i = \text{Id}_A \right)$$

Oss: • $D \xrightarrow{r} \{0\}$ è una retrazione

- ogni spazio topologico ha qualunque suo punto come retratto

ES: In uno spazio T2 ogni retratto è chiuso

Quindi ho un sacco di esempi di sottospazi che non sono retratti.

vedremo $\nexists$ retrazioni tra $\mathbb{R}^2$ e $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

def $A \subseteq X$ si dice retratto di deformazione ^{di X} se
 A è un retratto ($\exists r: X \rightarrow A$ retractione)

(18)

e $i \circ r \simeq \text{id}_X$

Cioè $\exists R: X \times I \rightarrow X$

tale che $R(x, 0) = x \quad \forall x \in X$

$R(x, 1) = i \circ r(x) = r(x) \quad \forall x \in X$

(Notazioni del Kosniowski)

retratto debole di deformazione : $\exists r: X \rightarrow A$ continue

tc $r \circ i \simeq \text{id}_A$

e $i \circ r \simeq \text{id}_X$

retratto forte di deformazione è retratto tc $i \circ r \simeq_A \text{id}_X$

OSS • uno spazio contraibile ha ogni suo punto come retratto di deformazione.

ES

- $[0, 1]$ è retratto (forte) di deformazione di $\mathbb{R}$
- $(0, 1)$ non lo è: infatti non è chiuso ne $\mathbb{R}$ e T^2 nelle
- corona circolare: uno dei bordi è retratto forte di deformazione.

• ES $X = \{ ax + by = 0, (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\} \} \subseteq \mathbb{R}^2$
rette con pendenze razionali

X è stellato, quindi cpa e contraibile.

$O = (0, 0)$ è un suo retratto di deformazione forte

Nessun $P \neq 0$ è un suo retratto di deformazione forte. (20)

