

6 dicembre 2017

①

Lemma 1: X spazio topologico $Y \subseteq X$ aperto e chiuso
 $\forall$ ogni sottospazio $Z \subseteq X$ connesso vale che

$$Z \subseteq Y \quad \text{oppure} \quad Z \subseteq X \setminus Y$$

dim: Z connesso : gli unici aperti e chiusi di $(Z, \tau_{X|Z})$
sono Z e $\emptyset$

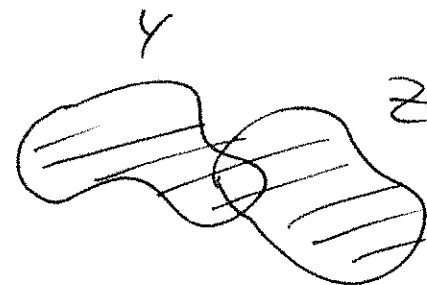
prendo $Y \cap Z$ è aperto e chiuso in $\tau_{X|Z}$

Quindi o vale $Z = Y \cap Z$ (cioè $Z \subseteq Y$)

oppure $\emptyset = Y \cap Z$ cioè $Z \subseteq X \setminus Y$

Lemma 2: X spazio topologico

$Y, Z \subseteq X$ sotto spazi connessi.



se $Y \cap Z \neq \emptyset$ allora $Y \cup Z$ è connesso

dim, A aperto e chiuso in $Y \cup Z$

$A \neq \emptyset$ voglio vedere che $A = Y \cup Z$

$A \cap Y$ è aperto e chiuso di Y

$A \cap Z$ " " " " Z

Al meno uno di questi due è $\neq \emptyset$

sia, pu fissare idee, $A \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow A \cap Y = Y$
 Y connesso

$Y \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow A \cap Z \supseteq Y \cap Z \neq \emptyset$

Z è connesso $\Rightarrow A \cap Z = Z$ $\star$ (3)

ES: se ho $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $Z_\alpha \subseteq X$ connesso $\forall \alpha \in I$

tali che $\exists p_x \in \bigcap_{\alpha \in I} Z_\alpha$ $p \in Z_\alpha \quad \forall \alpha \in I$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha$ è connesso.

Oss: se X è connesso e $Y \subseteq X$
non è affatto detto che Y sia connesso!

$\mathbb{R}$ è connesso e $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$ no

Domanda: se X e Y sono connessi $X \times Y$ lo è?

vediamo che sì

Oss $X \times Y \xrightarrow{p} X$ proiezione sul 1° fattore

④

so quindi che X è connesso

e $p^{-1}(x) \forall x \in X$ sono connessi
 Z
 Y

Mi chiedo in generale:

Se ho $f: Z \longrightarrow X$ con f continua e suriettiva
con X connesso
con $f^{-1}(x)$ connesso $\forall x \in X$

posso dire che Z è connesso?

TEO : Nelle ipotesi precedenti, se f è aperta o chiusa, ⑤
Allora vale che Z è conneso.

dim : siano A, B aperti non vuoti tali che

$$A \cup B = Z$$

voglio: $A \cap B \neq \emptyset$

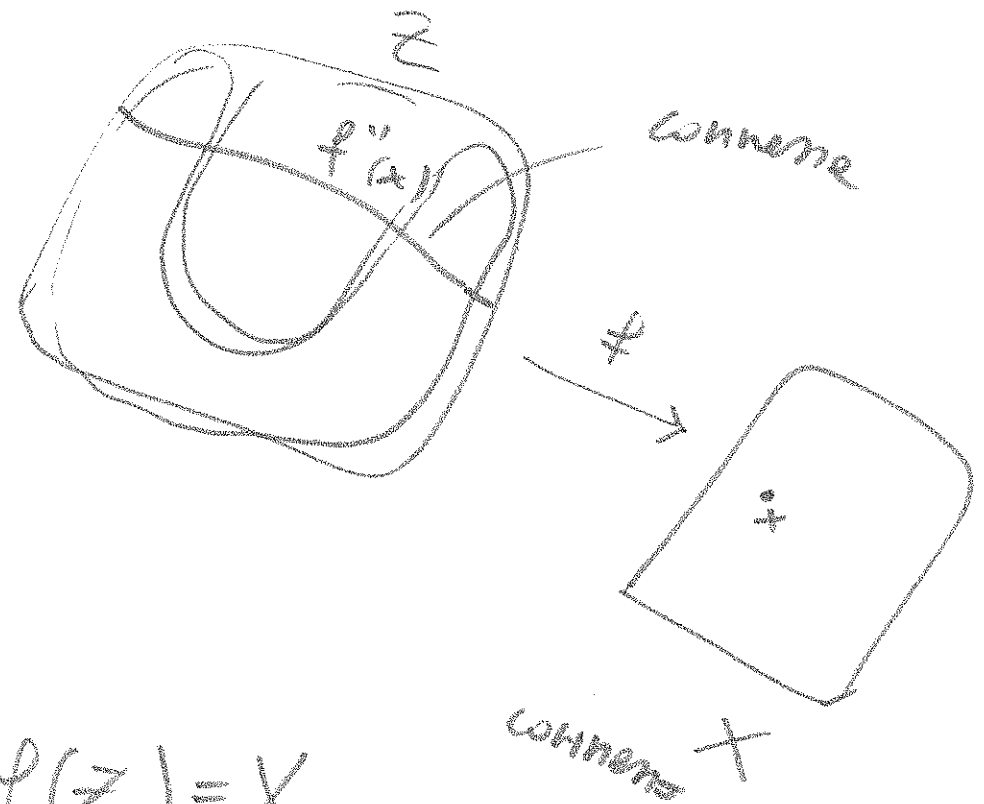
supp. f aperta

sappiamo che :

$f(A)$ e $f(B)$ sono
aperti non vuoti in X

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) = f(Z) = X$$

siccome
① X è conneso, $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$



Questo non mi dice direttamente che $A \cap B \neq \emptyset$ ⑥
Devo usare la connessione delle fibre!

$$\text{Sia } x \in f(A) \cap f(B)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset$$

d'altra
parte

$$f^{-1}(x) = (f^{-1}(x) \cap A) \cup (f^{-1}(x) \cap B)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$$

$f^{-1}(x)$ è connesso

$$\Rightarrow \underline{A \cap B \neq \emptyset}$$

Stesso ragionamento: se f è chiuso prendo C, D

chiusi non vuoti con $C \cup D = \mathbb{Z} \leadsto$ dimostro
 $C \cap D \neq \emptyset$ $\square$

COR se X e Y sono connessi $\Rightarrow X \times Y$ è connesso ⑦

dim: $p: X \times Y \rightarrow X$ soddisfa le ipotesi del teorema $\square$

ES: Dimostrate che se X e Y sono CPA

(cioè connessi per archi), allora $X \times Y$ è CPA.

oss: non serve teorema di prima: costruire direttamente arco tra due punti qualsiasi nel prodotto.

ES X sp. top. $C \subseteq X$ chiuso U aperto t.c.

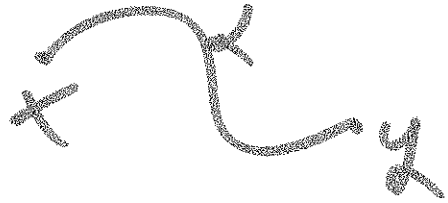
$$C \subseteq U \subseteq X$$

se X e $U \setminus C$ sono connessi $\Rightarrow X \setminus C$ è connesso

X cpa $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \quad \exists \alpha: [0, 1] \rightarrow X$
 continue

⑧

$\forall \alpha \quad x(0) = x \quad \text{e} \quad x(1) = y$

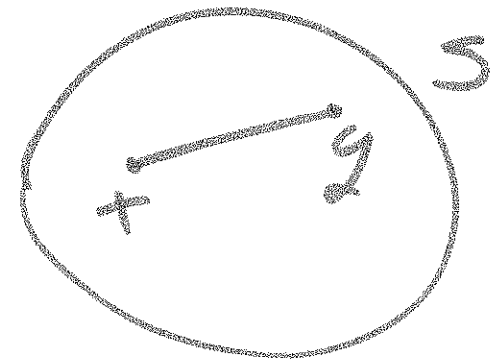


sappiamo : cpa $\Rightarrow$ connesso

~~A~~ controesempi domani con Biauchi

In $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se



$\forall x, y \in S$ il segmento in $\mathbb{R}^n$

di estremi x e y è tutto contenuto in S

⑨

$x, y \in S$ segmento tra y e x

$$tx + (1-t)y, \quad t \in [0, 1]$$

è appl. continua da $[0, 1]$ ad S

$$\text{con } \alpha(t) = tx + (1-t)y$$

$$\alpha(0) = y \quad \text{e} \quad \alpha(1) = x$$

$\Rightarrow$ tale S è connesso per archi!

ES. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ è connesso in $\mathbb{R}^n$

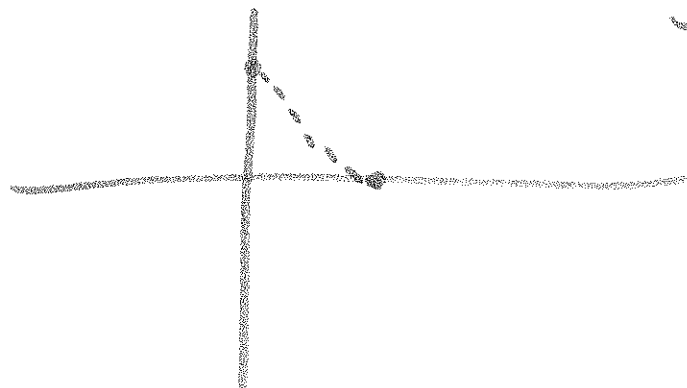
tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono connessi: la uso
come def

ESi sono sotto spazi di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$

connessi per archi che non sono convessi

70

$$S = \{xy = 0\} \text{ in } \mathbb{R}^2$$



verificate che è cpa

Lemma In $\mathbb{R}$ ^{sia} $S \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti:

i) S è un intervallo, cioè un convesso in $\mathbb{R}$;

ii) S è cpa

iii) S è connesso

dim: (i) $\Rightarrow$ (ii) già visto in generale



(ii) $\Rightarrow$ (iii) pure

(iii) $\Rightarrow$ (i) S connetto $\Rightarrow S$ intervallo (cioè
convenno) ⑪

supponiamo che S non sia convenno:

$$\exists x, y \in S, x < y, \text{ t.c. } \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \\ x < z < y \text{ e } z \notin S$$

allora

$$S = ((-\infty, z) \cap S) \cup (z, +\infty) \cap S)$$

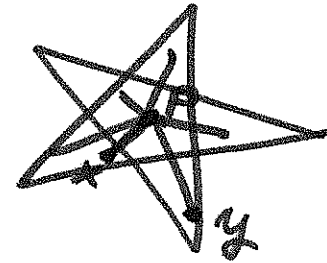


quindi S è unione disgiunta di due aperti
non vuoti quindi S è sconnesso!

Es. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice stellato se

$$\exists p \in S \text{ t.c. } \forall x \in S$$

il segmento tra p ed x
è contenuto in S .



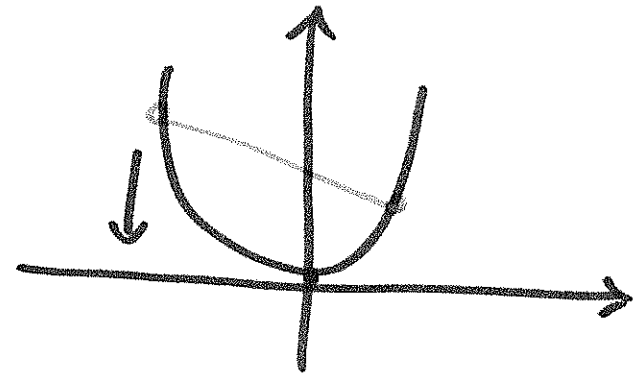
uno stellato di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

OSS: Attenzione: convesso stellato sono proprietà di
sotto spazi di $\mathbb{R}^n$

che non sono topologiche

Ad es:

$$\begin{aligned} \{y = x^2\} &= P \\ \text{e } \{y = 0\} &= X \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$



se prendo $\pi: P \rightarrow X$ è omeomorfismo
 $(x, x^?) \mapsto (x, 0)$ (verificare)

ES: connessione per archi è una proprietà topologica
 Torniamo alla connessione

Lemma 3 $Y \subseteq X$, X spazio topologico
 sia Z tale che

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$$

se Y è connesso allora Z lo è.

In particolare quindi: $\overline{Y}$ è connesso se Y lo è.

dim sappiamo: in $(Y, \tau_X|_Y)$ gli aperti
 aperti e chiusi sono $\emptyset$ e Y

Prendo A aperto e chiuso e non vuoto in Z

(14)

per lemma 1 $\sigma \quad Y \subseteq A$

(siccome Y connesso) $\sigma \quad Y \cap A = \emptyset$

~~SAVAE~~ voglio: non vale
la seconda

$$Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y}$$

se fosse $Y \cap A = \emptyset$
 $Y \subseteq Z \setminus A$

$$A \subseteq Z \subseteq \bar{Y}$$

$\Rightarrow Z \setminus A$ è chiuso in Z che contiene Y

e $A \neq \emptyset$ ma

allora $\bar{Y}^Z \subseteq Z \setminus A \subsetneq Z$

ma $Z = \bar{Y}^Z = \bar{Y}^X \cap Z$

$\rightarrow$ non è possibile!

per cui $Y \subseteq A$

$$\Rightarrow \overline{Y}^Z \subseteq A$$

A è chiuso $\parallel$
 Z

Abbiamo visto che
 $Z \subseteq A \Rightarrow Z = A$
 $\forall A$ aperto chiuso
 e non vuoto in Z .

$\square$