

Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2016/2017

Mercoledì 29 settembre (2 ore).

Introduzione del corso.

Definizione di spazio topologico. Primi esempi: 1) topologia discreta; 2) topologia euclidea su $\mathbb{R}$ 3) topologia concreta; 4) topologia della semicontinuità inferiore su $\mathbb{R}$.

Topologie su insiemi finiti con pochi elementi. Topologie confrontabili, più o meno fini.

L'intersezione di topologie è una topologia: topologia generata da una famiglia di sottoinsiemi. (ref. Manetti 3.1).

Martedì 4 ottobre (3 ore):

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà.

Definizione di topologia cofinita.

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta). Aperti negli spazi metrici e loro proprietà. Le bolle sono aperte. Gli aperti rispetto a una metrica sono le unioni di bolle.

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Equivalenza tra metriche: due metriche d, d' su un insieme X si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia.

(Ref. Manetti 3.1 e 3.4)

Esercizi:

Mercoledì 5 ottobre (2 ore)

Base di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi); Teorema della base (quando una famiglia di aperti può essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti).

Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

Esercizi: Verifica che la topologia $\mathcal{T}_s$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$ e strettamente meno fine di quella discreta $\mathcal{D}$.

Parte interna e chiusura di un sottoinsieme. Definizione e prime proprietà. Esempi. (Ref. Manetti 3.1 e 3.2).

Martedì 11 ottobre (2 ore)

Definizioni ed esempi di sottospazi densi.

Definizioni di intorni (nelle lezioni seguiamo il Manetti ma poi useremo intorni aperti) e di base locale o sistema fondamentale di intorni.

Definizione di continuità ed esempi.

Lemma: $f: X \rightarrow Y$ continua se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Lemma: composizione di applicazioni continue è una applicazione continua.

Definizione di continuità in un punto. Il caso degli spazi metrici.

Teo: f è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Definizione di omeomorfismo. Definizione di spazi omeomorfi. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

Mercoledì 12 ottobre (2 ore) Esercitazioni.

Giovedì 13 ottobre (2 ore) Applicazioni aperte e chiuse.

Lemma: data una applicazione $f: X \rightarrow Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:

- f è un omeomorfismo;
- f è continua biunivoca e aperta;
- f è continua biunivoca e chiusa.

Omeomorfismo locale.

Prop: un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta. (ref. 12.1 Manetti)

Data un'applicazione da un insieme X a uno spazio topologico $(Y, \mathcal{S})$, definizione della topologia generata $f^{-1}\mathcal{S}$ su X .

Teorema: sia $\varphi: (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (X, f^{-1}\mathcal{S})$. Allora φ è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua.

Topologia di sottospazio. Il caso degli spazi metrici.

Prop: se $A \subseteq Y$ e $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ allora la chiusura di A in Y (che denotiamo $\overline{A}^Y$) coincide con l'intersezione della chiusura di A con Y .

Prop: siano $E \subseteq Y \subseteq X$. Allora

1. Se Y è aperto in X allora $E \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se E è aperto in X ;
2. Se Y è chiuso in X allora $E \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X ;
3. Se Y è intorno di y in X allora E è intorno di y in Y se e solo se è intorno di y in X .

Teo: Sia Z uno spazio topologico, X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora $\varphi: Z \rightarrow Y$ è continua rispetto alla topologia di sottospazio se e solo se $i \circ \varphi$ è continua da Z a X .

Martedì 18 ottobre (2 ore)

Esercitazioni. Esercizi dal Foglio 2: Esercizio 3 (Topologia indotta da una funzione sul codominio). Esercizio 6. Esercizio 8

Mercoledì 19 ottobre (2 ore)

Proiezione stereografica. Esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.

Classificazione a meno di omeomorfismo degli intervalli di $\mathbb{R}$: inizio.

Topologia indotta $\mathcal{T}_C$ su un insieme X da una famiglia di applicazioni $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$, con Y_α spazio topologico.

Teo: proprietà caratteristica di questa topologia: se $\varphi: Z \rightarrow X$ è un'applicazione da uno spazio topologico Z , φ è continua se e solo se $f_\alpha \circ \varphi$ è continua per ogni α .

Definizione di topologia prodotto.

Teo: Base canonica; le proiezioni sono aperte (ma non sempre chiuse: controesempio); un'applicazione in uno spazio prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti; le fibre sono omeomorfe alle componenti.

Giovedì 20 ottobre (2 ore)

Metriche equivalenti. Metriche sui prodotti finiti di spazi metrici.

Es: il prodotto di elementi di base è una base per la topologia prodotto. In particolare la topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla topologia euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ è la topologia euclidea.

Spazi di Hasdorff o T2. Esempi. Uno spazio metrizzabile è T2.

Prop: in uno spazio T2 i punti sono chiusi. Cor: in uno spazio T2 gli insiemi finiti di punti sono chiusi.

Prop: sottospazi di T2 sono T2; il prodotto di spazi T2 è T2.

Martedì 25 ottobre (2 ore)

Esercitazione:

- Uno spazio X ha la topologia discreta se e solo se ogni applicazione da un altro spazio ad X è continua; uno spazio X ha la topologia concreta se e solo se ogni applicazione da X a un altro spazio è continua;
- Calcolo delle formule per la proiezione stereografica.
- Foglio 3 Esercizio 4 : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.
- Il grafico di un'applicazione continua è omeomorfo allo spazio di partenza;
- (Manetti 3.49) Foglio 3 Esercizio 5.

Mercoledì 26 ottobre (2 ore) Teo: X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

Oss: essere T2 è una proprietà topologica.

Prop: siano $f, g: X \rightarrow Y$ funzioni continue da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X .

Prop: due funzioni continue da uno spazio a uno spazio T2 che coincidono su un sottoinsieme denso sono uguali.

Prop: sia $f: X \rightarrow Y$ funzione continua da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora il grafico di f è chiuso.

Connessione: definizione e proprietà equivalenti. Sottospazi connessi.

Lemma: X spazio topologico $A \subseteq X$ aperto e chiuso. $Y \subseteq X$ connesso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Teo: $[0, 1]$ con la topologia euclidea è connesso.

Teo: immagine tramite continua di connessi è connesso.

Cor: la connessione è una proprietà topologica.

Definizione di arco tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di connessione per archi.

Teo: uno spazio connesso per archi è connesso.

Giovedì 27 ottobre (2 ore)

Definizione di concatenazione di cammini e di cammino inverso.

Teo: uno aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Definizione di sottoinsieme convesso e stellato di $\mathbb{R}^n$. Verifica che sono connessi.

Esempio: $\mathbb{R}^n$ e S^n sono connessi per archi.

Intervalli di $\mathbb{R}$. Teo: dato $I \subset \mathbb{R}$ sono equivalenti: 1) I è un intervallo 2) I è connesso 3) I è connesso per archi.

Esempio: $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ sono tutti non omeomorfi tra loro.

Lemma: sia $n \geq 1$ e sia $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$ (in particolare f non è iniettiva).

Cor: un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}$.

Teo: sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici con Y connesso e $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperto o chiuso allora X è connesso.

Teo: prodotto di spazi connessi è connesso.

Definizione di componente connessa.

Esempio: se $C \subseteq X$ è un connesso aperto e chiuso e non vuoto allora C è una componente connessa di X .

Lemma: sia X uno spazio topologico $Y \subseteq X$ un connesso e sia W tale che $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$. Allora Y è connesso.

Mercoledì 2 novembre (2 ore)

Lemma: l'unione di una famiglia di connessi che contengono un punto è connessa.

Teo: per ogni punto di uno spazi topologico esiste un'unica componente connessa che lo contiene. Le componenti connesse inoltre sono chiuse.

Esempio: Le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sono i punti (e non sono aperti).

Lemma: le componenti connesse sono aperte se e solo se ogni punto contiene un aperto connesso.

Oss: due spazi topologici hanno componenti connesse in corrispondenza biunivoca. Applicazione: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ non sono omeomorfi.

Esempio di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ connesso ma non connesso per archi: la pulce e il pettine (ref: Kosniowski)

Definizione di ricoprimento e sottoricoprimento di un insieme e di un sottoinsieme. Ricoprimento aperto.

Definizione di compattezza. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è compatto.

Giovedì 3 novembre (2 ore)

Richiami sulla compattezza.

Definizione di proprietà dell'intersezione finita (Manetti esercizio 4.25).

Prop: uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Teo: immagine tramite continua di compatti è compatta.

Cor: la compattezza è una proprietà topologica.

Teo: $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ è compatto con la topologia euclidea.

Teo: chiuso in un compatto è compatto. Compatto in un T_2 è chiuso. Unione finita di compatti è compatto.

Teo: data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ che sia chiusa con Y compatto e con fibra compatta, vale che X è compatto.

Teo: dato uno spazio topologico X e una sua base. Sono equivalenti: X è compatto e ogni ricoprimento di X composto di elementi della base possiede un sottoricoprimento finito.

Martedì 8 novembre (2 ore).

Esercitazioni.

Mercoledì 9 novembre (2 ore).

Prop: Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio di Hausdorff è chiusa.

Prop: X, Y spazi topologici, X compatto. Allora la proiezione sul secondo fattore $q: X \times Y \rightarrow Y$ è chiusa.

Cor: Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto.

Cor: Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Cenni al prodotto arbitrario di spazi topologici. Enunciato del Teorema di Tychonoff senza dimostrazione.

Compattificazione di Alexandroff $\widehat{X}$ o compactificazione a un punto di uno spazio topologico X : definizione, verifica che è una topologia, che lo spazio di partenza X è un sottospazio aperto di $\widehat{X}$ e che $\widehat{X}$ è compatto.

Giovedì 10 novembre (2 ore).

Prop: $\widehat{X}$ è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff e ogni punto di X possiede un intorno compatto.

Prop: Sia $f: X \rightarrow Y$ con X, Y T_2 con le proprietà:

(i) $f: X \rightarrow f(X)$ è un omeomorfismo sull'immagine (con la topologia indotta da Y);

(ii) f è aperta.

Allora la funzione $g: Y \rightarrow \widehat{X}$ definita in questo modo:

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è continua.

Def: Un'applicazione con la proprietà (i) si chiama immersione.

Cor: S^n è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^n$.

Spazi quoziente.

Definizione di topologia indotta $\mathcal{T}_f$ da una mappa $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ e prime proprietà (in particolare verifica che è la più fine topologia che rende continua f).

Definizione di sottoinsiemi saturi. Verifica che un sottoinsieme $B \subset Y$ è aperto se e solo se è immagine di un aperto saturo A di X .

Osservazione: non è vero in generale che f è aperta nè chiusa.

Esempio importante: $e: [0, 1] \rightarrow S^1$ definita da $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un'identificazione chiusa ma non aperta.

Teorema: Sia $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ con $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico. Sia $g: Z \rightarrow Y$ applicazione con Z spazio topologico. Allora sono equivalenti:

(i) g è continua da $(Y, \mathcal{T}_f)$ a Z ;

(ii) $g \circ f: X \rightarrow Z$ è continua.

Cor (proprietà universale dello spazio quoziente): Siano X, Z spazi topologici, Y un insieme. Siano $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow Y$ applicazioni con f suriettiva e g continua. Allora esiste $h: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se g è costante sulle fibre di f .

Osservazione importante: ogni relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X corrisponde ad un'opportuna applicazione suriettiva da X e viceversa. Data una relazione di equivalenza su uno spazio topologico chiamiamo spazio quoziente $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza con la topologia quoziente indotta dalla proiezione al quoziente $\pi: X \rightarrow X/\sim$ $\pi(x) = [x]$.

Se $S \subseteq X$, consideriamo la relazione di equivalenza: $x \sim x'$ sse $x = x'$ oppure $x, x' \in S$. Lo spazio quoziente $X/\sim = X/S$ si chiama contrazione di S ad un punto.

Mercoledì 16 novembre (2 ore). Esercitazioni. Esercizi dal foglio 4: 8,9,12,13.

Giovedì 17 novembre (2 ore).

Cor (del teorema di giovedì 10): se $\sim$ è una relazione di equivalenza sullo spazio topologico X e $\pi: X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione sul quoziente, data $g: Z \rightarrow X/\sim$ applicazione continua da uno spazio topologico Z . Allora esiste $\tilde{g}: X/\sim \rightarrow Z$ continua tale che $g = \tilde{g} \circ \pi$ se e solo se g è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$.

Prop: Nelle notazioni precedenti, supponiamo g suriettiva. Vale che:

(i) se g è aperta (risp. chiusa) allora lo è $\tilde{g}$;

(ii) se $X/\sim$ è compatto e Z è T2 allora $\tilde{g}$ è chiusa. (in particolare questo accade se X è compatto).

Esempi importanti: cilindro, nastro di Möbius, toro, bottiglia di Klein come quozienti di figure piane con lati identificati. Esercizio: la contrazione a un punto del bordo del disco 2-dimensionale chiuso è omeomorfo a S^2 .

Def: sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua suriettiva tra spazi topologici. f è un'applicazione quoziente o un'identificazione se Y ha la topologia quoziente generata da f .

Prop: sia $f: X \rightarrow Y$ continua e suriettiva. Se f è chiusa o aperta allora è una mappa quoziente.

Osservazione importante: non tutte le mappe quozienti sono aperte e/o chiuse. Controesempi.

Esercizio: composizione di mappe quozienti è mappa quoziente.

Martedì 22 novembre (2 ore). Esercitazioni.

Mercoledì 23 novembre (2 ore).

Teo: sia $f: X \rightarrow Y$ mappa quoziente; X compatto e T2. Sono equivalenti:

(1) Y è T2;

(2) f è chiusa;

(3) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$.

Lemma: Sia X uno spazio compatto e T2. Allora per ogni coppia di chiusi disgiunti C, D esistono due aperti A, B tali che $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Richiami su azioni di gruppo su un insieme. Azioni di gruppo su uno spazio topologico.

Esempio: azione di $\mathbb{Z}$ per traslazione su $\mathbb{R}$. Verifica che $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$.

Giovedì 24 novembre (2 ore).

Teo: sia $G < \text{Omeo}(X)$ un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X . Allora la mappa quoziente $\pi: X \rightarrow X/G$ è aperta. Se G è finito, π è chiusa.

Verifica che $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ non è chiusa.

Teo: Se $G < \text{Omeo}(X)$ è un sottogruppo finito del gruppo degli omeomorfismi di X e X è T2, allora X/G è T2. Dimostrato come conseguenza di:

Teo: Se $G < \text{Omeo}(X)$ è un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X . X/G è T2 se e solo se $K = \{(x, g \cdot x), x \in X, g \in G\}$ è chiuso.

Prop: Se $G < \text{Omeo}(X)$ è un sottogruppo finito del gruppo degli omeomorfismi di X e X è T2. Supponiamo che esista $A \subseteq X$ aperto tale che

(i) $\pi: A \rightarrow X/G$ è suriettiva;

(ii) l'insieme $\{g \in G \mid A \cap g \cdot A \neq \emptyset\}$ ha cardinalità finita.

Allora X/G è T2.

Esempio/esercizio: $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ è T2, e vale che $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \sim S^1 \times \dots \times S^1$ (n volte).

Prop: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \sim S^n/\{\pm 1\}$.

Cor: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto e T2.

Esercizio: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come disco chiuso con bordo identificato in modo opportuno.

Martedì 29 ottobre (2 ore)

Spazi localmente compatti.

Teo: In uno spazio localmente compatto e T2 ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorno compatto.

Esercizi: 1) un sottospazio chiuso di uno spazio loc. comp. è loc. comp. 2) Il prodotto di due spazi loc. comp. è loc. comp.

Cor: Se $f: X \rightarrow Y$ è una mappa quoziente e Z è uno spazio localmente compatto e T2, allora $f \times Id_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ è una mappa quoziente.

Def. spazio topologico secondo-numerabile o a base numerabile.

Esempi.

Mercoledì 30 ottobre (2 ore) Def. Spazio topologico separabile.

Esempi

Lemma: secondo numerabile $\Rightarrow$ separabile.

Lemma: metrizzabile + separabile $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Osservazione: ne deriva che la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è metrizzabile.

Prop (Teorema di Lindeloff): Se X è secondo numerabile ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento numerabile.

Def. Spazio primo-numerabile.

Esempi.

Oss: primo e secondo numerabile e separabile sono proprietà topologiche.

Es: prodotto di due spazi primo numerabili (risp. secondo numerabili, risp. separabili) è primo numerabile (risp. secondo numerabile, risp. separabile).

Es: secondo-numerabile $\Rightarrow$ primo numerabile.

Esempio di quoziente di $\mathbb{R}$ che non è primo numerabile.

Giovedì 1 dicembre (2 ore).

Esercitazione.

Martedì 6 dicembre (2 ore)

Successioni in uno spazio topologico. Esempi. Unicità del limite in spazi T2. Def. di punto di accumulazione per una successione. Definizione di sottosuccessione.

Lemma: Sia $\{a_n\}$ una successione. Se $\{a_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente a p allora p è di accumulazione per $\{a_n\}$.

Prop: X primo-numerabile, $S \subseteq X$, $x \in X$. Sono equivalenti:

- 1) esiste una successione a valori in S che converge a x ;
- 2) x è punto di accumulazione per una successione a valori in S ;
- 3) $x \in \overline{S}$.

Prop: in uno spazio topologico compatto ogni successione possiede punti di accumulazione.

Def. di compatto per successioni.

Prop: primo-numerabile + compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni.

Prop: X secondo-numerabile. Sono equivalenti: (1) X compatto; (2) ogni successione in X possiede punti di accumulazione; (3) X compatto per successioni.

Def. e prima proprietà di successioni di Cauchy in spazi metrici. Def. spazio metrico completo.

Teo: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ con la metrica euclidea sono completi.

Mercoledì 7 dicembre (2 ore)

Def. di spazio totalmente limitato.

Lemma: compatto per successioni $\Rightarrow$ totalmente limitato.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ ogni successione possiede una sottosuccessione di Cauchy.

Teo: X spazio metrico. Sono equivalenti: (1) X compatto (2) ogni successione in X possiede punti di accumulazione (3) X compatto per successioni (4) X completo e totalmente limitato.

Def. proprietà di separazione di spazi topologici T0–T4. Spazi regolari, spazi normali.

Prop: metrizzabile $\Rightarrow$ normale.

Es: la retta di Sorgenfrey è normale.

Prop: secondo-numerabile + regolare $\Rightarrow$ normale.

Enunciato del Teorema di Uryson.

Martedì 13 dicembre (2 ore)

Esercitazioni.

Mercoledì 14 dicembre (2 ore)

Introduzione alla Topologia Algebrica.

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ sono omotope. Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

Def. di cammini equivalenti (omotopi relativamente a $\{0, 1\}$).

Esercizi.

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Esempio: D^2 è omotopicamente equivalente a un punto.

Giovedì 15 dicembre (1 ora).

Tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$, per ogni n , sono omotopicamente equivalenti a un punto.

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Ogni sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Es: uno spazio X è contraibile se e solo se id_X è omotopa a una costante.

Prop: X contraibile è connesso per archi.

Oss: vedremo nelle prossime ore che invece S^1 è connesso per archi ma non contraibile.

Retratti (forti e non) di deformazione e retratti. Definizioni (seguendo le notazioni del Kosniowski) ed esempi.

Martedì 20 dicembre (2 ore)

Esempio: ogni punto è retracts per qualunque spazio.

Esercizio: ogni retracts in un T^2 è chiuso.

Domanda: è vero che ogni retracts debole è chiuso in uno spazio T^2 ?

Esempio: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si retracts forte di deformazione su S^{n-1} .

Esempio: $[-1, 1]^2 \setminus \{0\}$ si retracts forte di deformazione sul suo bordo $B = \{\pm 1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{\pm 1\}$.

Esempio: il toro meno un punto si retracts di deformazione forte sulla figura ad otto.

Richiami sul prodotto di cammini.

Lemma: se α, β, γ sono cammini compatibili, $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Lemma: se $\alpha \sim \beta$ e $\gamma \sim \delta$, allora $\alpha * \gamma \sim \beta * \delta$.

Lemma: Se α è un cammino tra x e y $\alpha * \epsilon_y \sim \alpha \sim \epsilon_x * \alpha$.

Mercoledì 21 dicembre (2 ore)

Lemma: Se α è un cammino tra x e y , allora $\alpha * \bar{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\bar{\alpha} * \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio X con punto base x_0 .

Esercizio: Il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali.

Esercizio: se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, per ogni $x_0 \in X$ $\pi_1(X, x_0) = \{[\epsilon_{x_0}]\}$.

Teo: Dato γ cammino in X tra x e y , definito $\mu_\gamma: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ come $\mu_\gamma([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$, μ_γ è un isomorfismo di gruppi.

Giovedì 22 dicembre (2 ore).

Esercitazioni.