

1) (X, τ) spazio topologico.

$U \subseteq X$ aperto si dice primo se vale:
proprio

$\forall W, V \in \tau$ tali che $W \cap V \subseteq U \Rightarrow W \subseteq U$ oppure $V \subseteq U$.

(a) un esempio di uno spazio con un aperto non primo:

prendiamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea τ_e ;

prendiamo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$; $(0, 1) \in \tau_e$.

Siano ora $W = (-\infty, 1)$ $V = (0, +\infty)$

$U = W \cap V$ ma $W \not\subseteq U$ e $V \not\subseteq U$

Dunque U non è primo.

(b) Dimostro che se $x \in X$ è un punto chiuso, allora

$X \setminus \{x\}$ è un aperto primo.

Siano $W, V \in \tau$ tali che $W \cap V \subseteq X \setminus \{x\}$

allora $x \notin W \cap V$

allora $x \notin W$ oppure $x \notin V$

cioè $W \not\subseteq X \setminus \{x\}$ oppure $V \not\subseteq X \setminus \{x\}$ ok

(c) Se X ha la topologia discreta $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$

ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso.

Dunque certamente i ^{complementari} punti di X sono primi per

il punto (b).

Voglio mostrare che qualunque altro insieme non è primo

$$2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} 3x & x \leq 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$

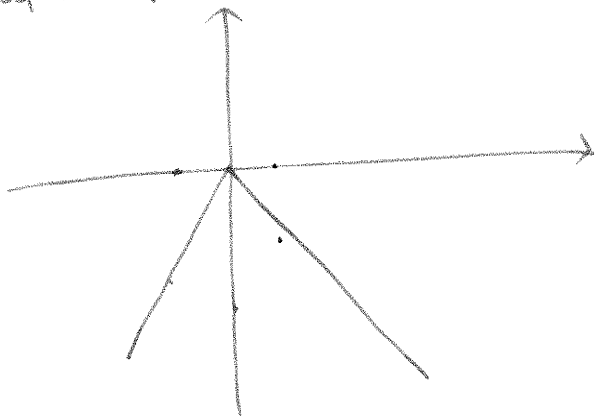
(a) $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ (3)
 è continua se
 $\forall U \in \tau_Y \quad f^{-1}(U) \in \tau_X$
 f è aperta se $\forall U \in \tau_X \quad f(U) \in \tau_Y$
 f è chiusa se $\forall C$ chiuso in X
 $f(C)$ è chiuso in Y

b) $f: (\mathbb{R}, \tau_e) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$ è continua

perché $f|_{[0, +\infty)}(x) = -2x$ e $f|_{(-\infty, 0]}(x) = 3x$

sono continue sui due chiusi $[0, +\infty)$ $(-\infty, 0]$
 e coincidono su $\{0\} = [0, +\infty) \cap (-\infty, 0]$

Grafico di f :



$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \text{ che non è aperto in } \mathbb{R}$$

Dunque f non è aperta $(\mathbb{R}, \tau_e) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

Per quanto riguarda i chiusi, f è chiusa $(\mathbb{R}, \tau_e) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

Infatti: Sia C chiuso in X

$$\text{allora } C = \underbrace{C \cap (-\infty, 0]} \cup \underbrace{C \cap [0, +\infty)}$$

chiusi perché $\cap$ di due chiusi

$$f(C) = f|_{(-\infty, 0]}(C \cap (-\infty, 0]) \cup f|_{[0, +\infty)}(C \cap [0, +\infty))$$

ora $f|_{(-\infty, 0]}(x) = 3x$ è un isomorfismo sull'immagine
 (Inversa: $g: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0]$)
 $g(t) = \frac{1}{3}t$

Sia $S \subseteq X$ tale che $X \setminus S$ contiene almeno due punti x, y $x \neq y$
Allora $S = (S \cup \{x\}) \cap (S \cup \{y\})$

$S \cup \{x\}$ e $S \cup \{y\}$ sono due aperti non contenuti in S
e dunque S non è primo.

(d) Se X è T_2 i suoi aperti primi sono tutti e soli i complementari di punti.

Sia $U \subseteq X$ aperto tale che $\exists x, y \in X \setminus U$
 $x \neq y$

per la condizione che X è T_2 ,

$\exists V_x, V_y \in \mathcal{T}$ tali che $V_x \cap V_y = \emptyset$
e $x \in V_x, y \in V_y$

Dunque posso scrivere

$$U = \underbrace{(U \cup V_x)}_{\text{aperto}} \cap \underbrace{(U \cup V_y)}_{\text{aperto}}$$

perché unione di minori

e dunque U non è primo.

e allo stesso modo $f|_{[0,+\infty)}$ è un isomorfismo tra

(4)

$[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$

Dunque l'immagine di chiusi è chiusa tramite queste due funzioni. Dunque

$f(C)$ è unione di due chiusi $\Rightarrow$ è chiusa.

(c) Mi chiedo se $f: (\mathbb{R}, \tau_e) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_s)$
è continua

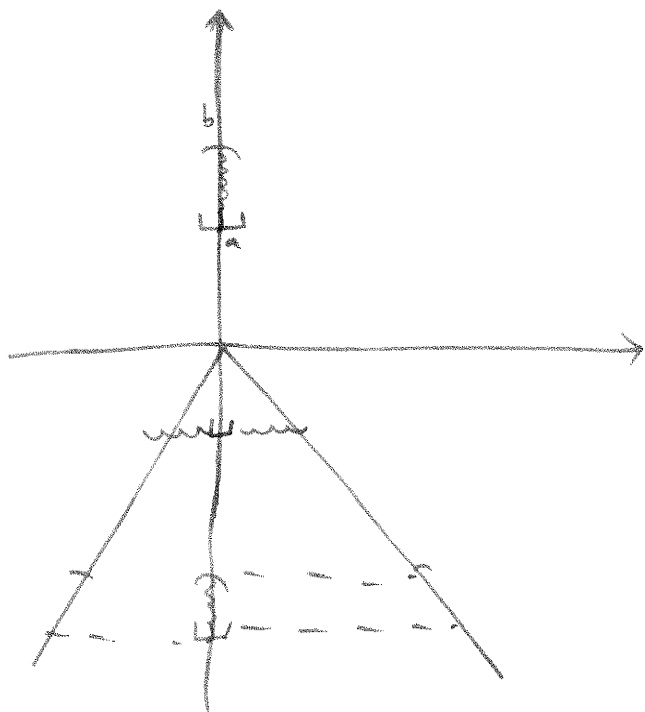
Per vedere se lo è, basta controllare se
le controimmagini di elementi della base
 $\{[a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ di τ_s sono aperti in τ_e

$$f^{-1}([a, b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a > 0 \\ \{0\} & \text{se } a = 0 \\ [-\frac{1}{3}a, -\frac{1}{2}a] & \text{se } a < 0 < b \\ [-\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b) \cup (-\frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a] & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

In ogni caso, gli ultimi 3 insiemi
non sono aperti in τ_e

(ad esempio è chiaro che
 $\{0\}$ non è aperto in τ_e)

Quindi l'applicazione non è
continua



Studiamo ora se f è aperta / chiusa

$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$ che non è aperto neanche per T_S
infatti se fosse aperto avremmo $\exists \varepsilon > 0$ tale che
 $[0, \varepsilon) \subseteq (-\infty, 0]$, che è assurdo.

Dunque $f: (\mathbb{R}, T_e) \rightarrow (\mathbb{R}, T_S)$ non è aperta

$f: (\mathbb{R}, T_e) \rightarrow (\mathbb{R}, T_S)$ è invece chiusa.

Infatti, abbiamo visto prima che

$f: (\mathbb{R}, T_e) \rightarrow (\mathbb{R}, T_S)$ è chiusa, e $T_e \subsetneq T_S$

dunque se C è chiuso per T_e $f(C)$ è chiuso per T_e
 $\Rightarrow$ chiuso per T_S .

(d) Sia $\mathcal{S}$ la topologia quoziente indotta da f

$$f: (\mathbb{R}, T_e) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})$$

$\mathcal{S}$ è la più fine delle topologie che rendono f continua,

$$\text{vale: } \mathcal{S} = \{U \subseteq \mathbb{R} \text{ tale che } f^{-1}(U) \in T_e\}$$

L'esercizio chiede se questa topologia è confrontabile
con T_e : poiché abbiamo appena visto che $\xrightarrow{\text{nel punto (b)}}$

$f: (\mathbb{R}, T_e) \rightarrow (\mathbb{R}, T_e)$ è continua,

per def. di topologia quoziente $\mathcal{S} \geq T_e$

Quel che osserviamo che $\nexists S \subseteq \mathbb{R}$ tale che $S \subseteq (0, +\infty)$
 $f^{-1}(S) = \emptyset$ (poiché $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$)

Dunque, ad esempio $\{1\} \in \mathcal{S}$, ma $\{1\} \notin T_e$

Quindi $T \subsetneq S$.

⑥

Per quanto riguarda T_S , abbiamo appena visto
(nel punto (c)) che $\exists v \in T_S$ tale che $f^{-1}(v) \notin T$
dunque $v \notin S$ per definizione.

D'altra parte, come prima, $\{1\} \in S$ ma $\{1\} \notin T_S$

Dunque S non è confrontabile con T_S .

3) (a) X spazio topologico si dice contraibile se ⑦
 è omotopicamente equivalente ad un punto.

equivalentemente,

X è contraibile se $\text{id}_X: X \rightarrow X$ è omotopa ad una applicazione costante.

(b) $\mathbb{R}^2$ è contraibile: uso la ^{seconda} caratterizzazione.

Costruisco un'omotopia tra

$$\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$e c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (0, 0)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F((x, y), t) = (tx, ty)$$

è appl. continua, $F((x, y), 0) = (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$F((x, y), 1) = (x, y) = \text{id}_X(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad \underline{OK}$$

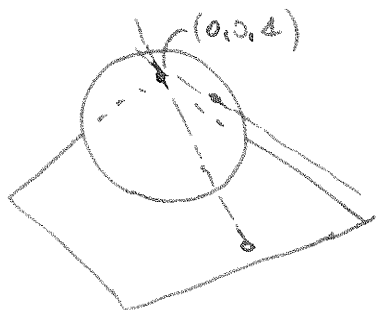
(c) $S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$ è contraibile.

la proiezione stereografica

$$S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è un omeomorfismo

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$



Dunque $S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}^2$

Essere contraibili è una proprietà topologica. ⑧

(Infatti se X è omeotopicamente equivalente a un punto $\{p\}$ e Y è omeomorfo a X , allora Y è omeot. equiv. a $\{p\}$ per cui l'omeomorfismo è una equivalenza topologica)
Quindi $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ è contraibile.

(d) $S^2 \setminus \{(0,0,1), (1,0,0)\}$

tramite la proiezione stereografica è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ non è contraibile. Infatti, non è neanche semplicemente connesso.

Infatti, ricordiamo che

Se X è contraibile e semplicemente connesso
allora è connesso per archi e
 $\forall x_0 \in X \quad \pi_1(X, x_0) = \{[Ex_0]\}$

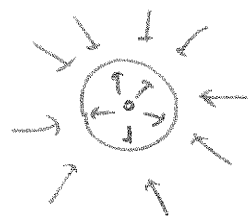
(infatti $\pi_1(X, x_0) = \frac{\{\text{lacci con pt base } x_0\}}{\{\text{equivalenze tra lacci}\}}$)

se id_X è omeotopa a costante $X \rightarrow \{x_0\} \subseteq X$

allora ogni laccio α con punto base x_0 è equivalente al laccio banale $\Rightarrow [\alpha] = [Ex_0]$

Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ si retrae di deformazione

forte su $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$



(9)

Esplícitamente, la retractione la posso scrivere

usando la retractione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ su $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$\pi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow S^1$$

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{r} S^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x,y) \mapsto (x-1,y) \mapsto \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + 1, \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \right)$$

Questa retractione forte di deformazione

ci dice che

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,1), (1,0,0)\}, x_0) \cong$$

$$\cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \neq \{0\}$$

Quindi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,1), (1,0,0)\}$ non è contrattibile.