

ESERCIZIO $D = \text{disco chiuso unitario}$ $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

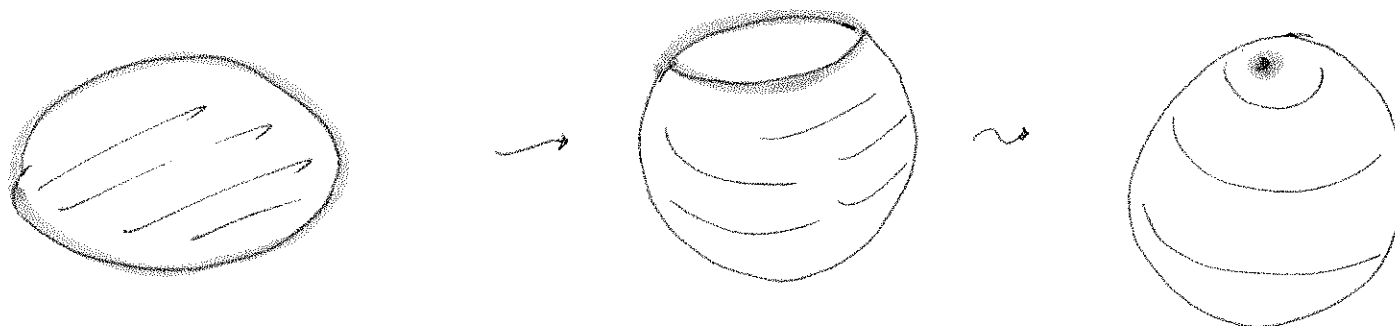
①

sia $B = \partial D = S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Dimostrare che $D/B \sim S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

"
contrazione
di B ad un
punto
sfera unitaria

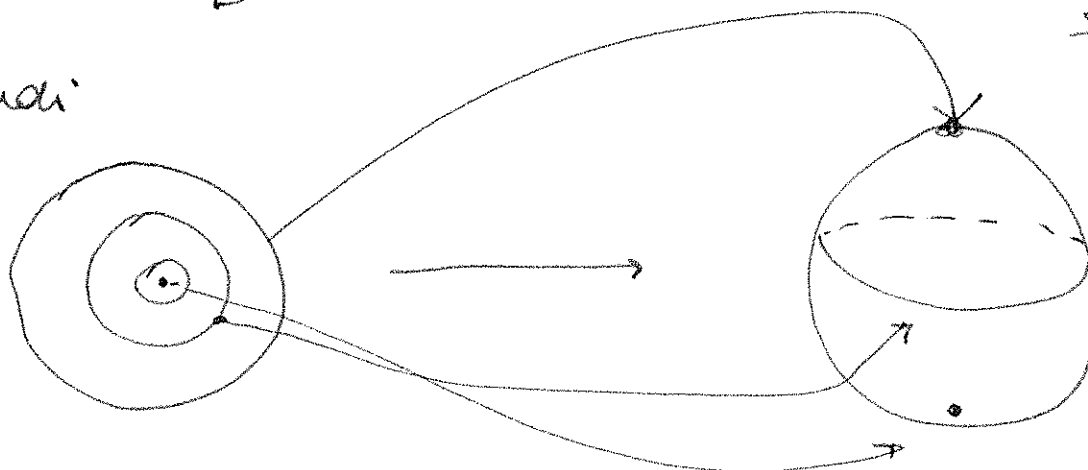
idea:



voglio costruire una applicazione

$D \longrightarrow S^2$ prendo $S = \text{sfera centrata in } (0, 0, 1) \text{ di raggio } 1$
 $S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

che mandi

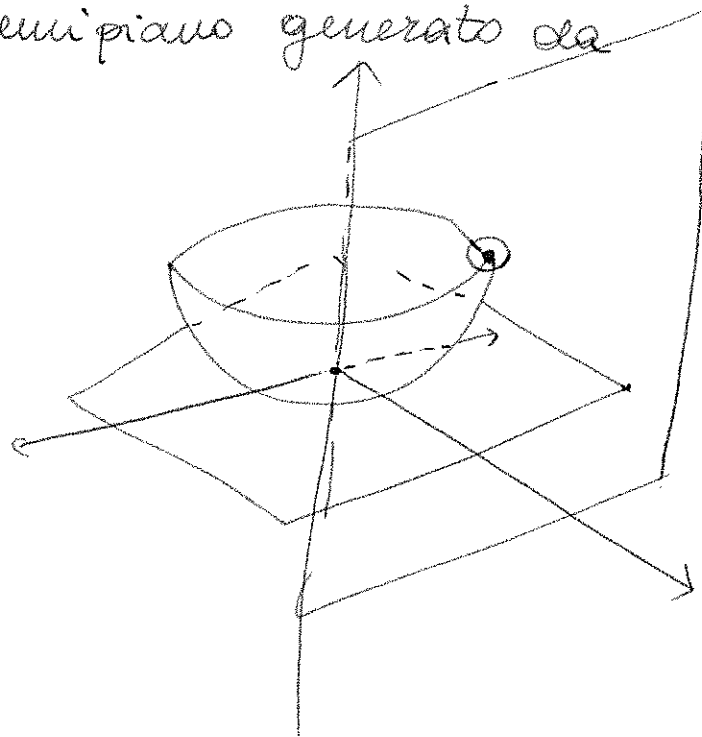
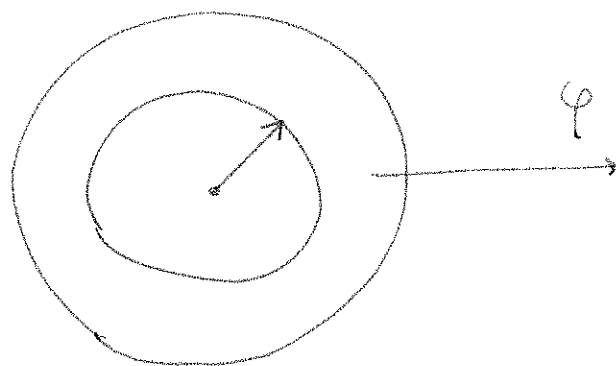


i cerchi concentrici
del disco nei
paralleli in modo
che $(0, 0)$ vada in $S = (0, 0, 1)$
e B vada in $N = (0, 0, 1)$

(2)

Quindi $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) =$ Geometricamente voglio prendere il punto
 di altezza $z = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ = norma del vettore $(\bar{x}, \bar{y})$
 tale che sia l'intersezione del piano $z = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$
 con il semipiano generato da

$(0, \bar{x}, \bar{y})$
 e dall'asse $z =$
 $= \text{span}(0, 0, 1)$



allora per calcolare
 la espressione di
 questo punto prendo

il fascio di piani per l'asse z $\lambda x + \mu y = 0$

$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ prendiamo $\lambda = \bar{y}$ e $\mu = -\bar{x}$

piano per l'ane z ponente da $(0, \bar{x}, \bar{y})$: $\bar{y}x - \bar{x}y = 0$

ora interseco con S e con $z = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \\ \bar{y}x - \bar{x}y = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \text{ottengo}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\bar{x}(z - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2})}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \\ y = \frac{\bar{y}(z - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2})}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \\ z = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \end{cases}$$

quindi l'applicazione che cerco è:

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{-x(z - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}, \frac{y(z - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

oss.: l'espressione analitica di φ assomiglia abbastanza alla proiezione stereografica. In effetti anche la definizione geometrica è simile.

Dunque, abbiamo costruito $\varphi: D \longrightarrow S$

continua suriettiva tale che

$$\varphi^{-1}(p) = \begin{cases} \text{un punto se } p \neq (2, 0, 0) \\ B \text{ se } p = (2, 0, 0) \end{cases}$$

Dunque φ ha le stesse fibre della proiezione $\pi: D \rightarrow D/B$

Quindi per la proprietà universale delle topologie quoziente

$\exists! \bar{\varphi}: D/B \rightarrow S$ tale che
 $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \pi \downarrow & \parallel & \nearrow \varphi \\ D/B & & \end{array}$$

e $\bar{\varphi}$ è continua e biettiva.

Dobbiamo mostrare che $\bar{\varphi}$ è un omeomorfismo
cioè, equivalentemente, che

- è aperta;
- è chiusa;
- è inversamente continua.

vediamo due modi:

→ modo furbo astratto:

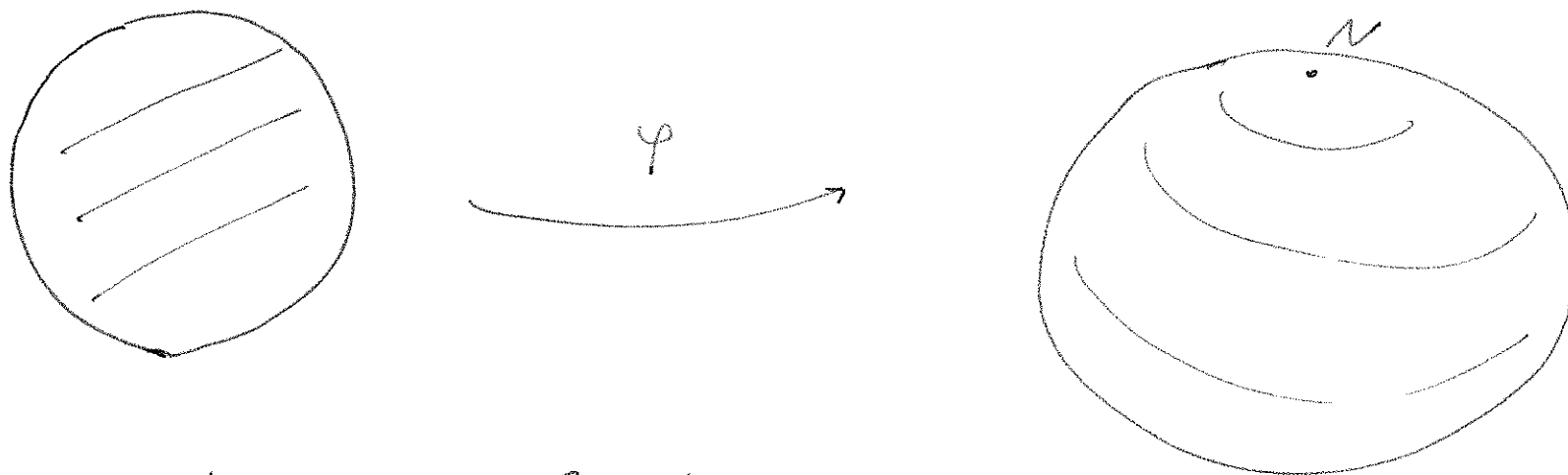
$\varphi: D \rightarrow S$ D è compatto, S è T_2

quindi φ è chiusa. Allora (sempre per proprietà universale delle topologie quoziente)

$\bar{\varphi}$ è chiusa ok.

→ vediamo in un altro modo che φ è chiusa:

(5)



$$\varphi|_{D \setminus B} : D \setminus B \longrightarrow S \setminus \{(2,0,0)\}$$

è un omeomorfismo (esibire una inversa continua)

sia $C \subseteq D$ chiuso. se $C \subseteq D \setminus B$ allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che

$$C \subseteq D \setminus \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1 - \varepsilon\} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - \varepsilon\} = E$$

allora $\varphi(C)$ è chiuso in $\varphi(E) = S \cap \{z \leq \sqrt{1 - \varepsilon}\}$
che è chiuso in S

$\Rightarrow \varphi(C)$ è chiuso in S

(6)

se invece $C \cap B \neq \emptyset$ allora $\varphi(C)$ contiene $N = (?, 0, 0)$

$$\text{e } \varphi(C) = \{N\} \cup \varphi(C \setminus B)$$

$\varphi(C \setminus B)$ è chiuso in $S \setminus \{N\}$

dunque $\overline{\varphi(C \setminus B)}^S = \begin{cases} \varphi(C \setminus B) \\ \text{oppure } \varphi(C \setminus B) \cup \{N\} \end{cases}$

In ogni caso $\varphi(C \setminus B) \cup \{N\}$ è chiuso in S .

$$\begin{matrix} \varphi(C) \\ \parallel \\ \varphi(C) \end{matrix}$$

Q.E.D.