<u>ESERCIZI di NATALE</u>

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2018/19

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione lineare tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ (con la topologia euclidea) è chiusa e continua.
   (b) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (c) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (d) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

2. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^2$: $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, con la topologia indotta da quella euclidea. Si consideri l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to X$ definita così:

$$f(x, y) := \begin{cases} (x, 0) \text{ se } x \neq 0, \\ (0, y) \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

   Sia $\mathcal{T}_f$ la topologia quoziente indotta su X da f.
   (a) L'applicazione $f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e) \to (X, (\mathcal{T}_e)_{|X})$ è continua? La topologia $\mathcal{T}_f$ è confrontabile con la topologia euclidea $(\mathcal{T}_e)_{|X}$ (se sì dire se è più o meno fine)?
   (b) Lo spazio $(X, \mathcal{T}_f)$ è T2?

3. Dimostrare che:
   (a) La compattificazione di Alexandroff di uno spazio discreto finito è uno spazio discreto.
   (b) Il punto precedente vale anche per spazi infiniti?

4. Uno spazio topologico di cardinalità maggiore o uguale a 2 si dice *totalmente sconnesso* se le sue componenti connesse sono tutti e soli i suoi punti.
   (a) Mostrare che uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.
   (b) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.
   (c) Si dimostri che la retta di Sorgenfry $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ è totalmente sconnessa.
   (d) Sia X uno spazio topologico qualunque. Consideriamo la relazione di equivalenza su X: $x \sim y$ se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa. Dimostrare che lo spazio quoziente $X/\sim$ è totalmente sconnesso.
   (e) Esistono spazi totalmente sconnessi e localmente connessi?