ESERCIZI di NATALE

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2017/18

1. (a) Sia X spazio topologico con la proprietà che per ogni altro spazio topologico Y e per ogni applicazione $f\colon X \to Y$, f è continua. Dimostrare che X ha la topologia discreta.
   (b) Sia Y spazio topologico con la proprietà che per ogni altro spazio topologico X e per ogni applicazione $f\colon X \to Y$, f è continua. Dimostrare che Y ha la topologia concreta.

2. Si considerino i sottoinsiemi $X = (0, 1]$ e $Y = [0, 1]$ in $\mathbb{R}$.
   (a) Trovarne la parte interna e la chiusura rispettivamente con le topologie $\mathcal{T}_e$ (euclidea), $\mathcal{D}$ (discreta), $\mathcal{C}$ (concreta), $\mathcal{K}$ (cofinita), T_- (della semicontinuità superiore), $\mathcal{T}_S$ (di Sorgenfrey).
   (b) Stabilire se sono connessi/compatti/separabili rispettivamente con le topologie indotte da quelle elencate sopra.

3. Si ponga $A := \{3k + 1 \mid \forall k \in \mathbb{N}\}$ e $B := \{3k + 2 \mid \forall k \in \mathbb{N}\}$ e sia $\mathcal{T}$ la topologia su $\mathbb{N}$ generata dalla collezione di insiemi $\{A, B, \{3h\} \mid \forall h \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Stabilire se $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ è T1 e/o di Hausdorff.
   (b) Si determini, se esiste, un sottospazio infinito di $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ che sia compatto.
   (c) Si discuta la continuità delle funzioni $f, g\colon (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{T})$ così definite: $f(x) = x+1$ e $g(x) = 3x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

4. Sia X l'intervallo $[-1, 1]$ con la topologia $\mathcal{T}$ così definita: U è aperto non banale di X se e solo se U non contiene il punto 0 oppure U contiene l'intervallo $(-1, 1)$.
   (a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
   (b) $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio di Hausdorff ?
   (c) $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio connesso?
   (d) $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio compatto?
   (e) Il sottospazio $X \setminus \{0\}$ con la topologia indotta da $\mathcal{T}$ è compatto?

5. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva tra due spazi topologici X e Y tale che per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ sia compatta. Si dimostri che se X è a base numarabile (ovvero 2-numerabile), allora Y lo è. Fare un'esempio di un'applicazione continua, chiusa e suriettiva con almeno una fibra non compatta tra due spazi topologici X e Y tali che X sia a base numerabile ma Y no.