

Esercitazioni

29 novembre 2017 ①

④ Foglio 3

X, Y spazi topologici

$$p: X \times Y \longrightarrow X$$

Vero, o falso:

- se vero dimostrarlo (o giustificarlo)
- se falso: esibire un controesempio

a) p è aperta.

vero: facciamo la verifica per esercizio:

Base canonica per topologie prodotto su $X \times Y$

$$\text{è } \{U \times V, U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

verifico che l'immagine tramite p degli

elementi delle basi canoniche è aperta

(2)

$$p(U \times V) = \begin{cases} U & \text{se } V \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

comunque
è aperto in X OK

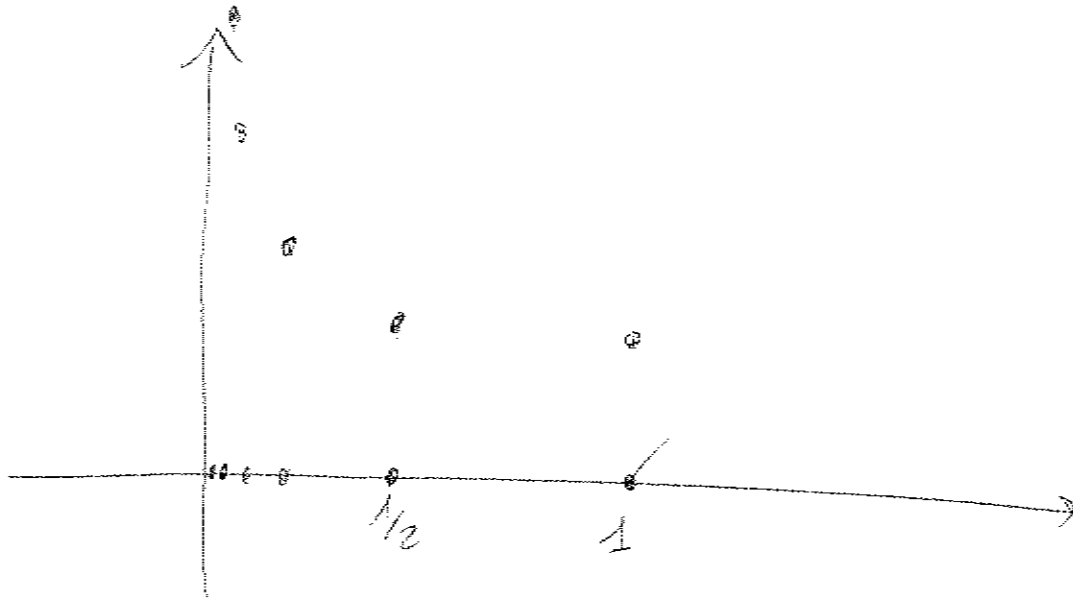
b) p è chiusa.

No: controesempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con topologia

prodotto indotta da T_e sui due fattori

$$C = \{xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{chiuso ma} \quad \xrightarrow{\text{zeri di } xy-1} \quad \boxed{\text{che è continuo e } \mathbb{R}^2 \text{ e } T_e}$$
$$p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{che non è chiuso in } \mathbb{R}$$

facciamo un altro esempio per cambiare!



(3)

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, n \right), n \in \mathbb{N}^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Esercizio: verificare
che è un chiuso
di $\mathbb{R}^2$

$$p(E) = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

non è chiuso! $0 \in \overline{p(E)}$

ES: verificate che E è un sotto spazio discreto
di $\mathbb{R}^2$

c) X è omeomorfo al quoziente

(4)

$$\frac{X \times Y}{\sim}$$

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ sse } x = x'$$

oss: insiemisticamente è vero: classi di equivalenza
di $\sim$ $\{x\} \times Y$, $x \in X$

solo le fibre di $p: X \times Y \rightarrow X$

Quindi abbiamo

$$X \times Y \xrightarrow{p} X$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow \\ \pi \downarrow & & \overline{p} \\ \frac{X \times Y}{\sim} & \xleftarrow{\pi} & \end{array}$$

• siccome p è costante sulle fibre di π $\exists \overline{p}: \frac{X \times Y}{\sim} \rightarrow X$
continue fc $p = \overline{p} \circ \pi$

⑤

• Siccome π è costante sulle fibre di p

$$\exists \bar{\pi} \text{ tale che } \bar{\pi} \circ p = \pi \quad \text{continua}$$

e sono una l' inversa dell' altra .

$\Rightarrow$ abbiamo omeomorfismo tra $\frac{X \times Y}{\sim}$ e X

23) Foglio 3

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ disco chiuso unitario

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D} \cong S^1$$

Considero lo spazio topologico $\frac{D}{\partial D} =: X$

contrazione a un punto di ∂D

Idea : $X \sim S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

⑥

Come faccio a verificarlo?

idea: costruire

1 applicazione continua

$$f: D \longrightarrow S^2$$

che abbia ∂D come fibra
su un punto e sia omeomor-

fisso in $D \setminus \partial D$

$$\begin{array}{c} D \\ \pi \downarrow \\ X \end{array}$$

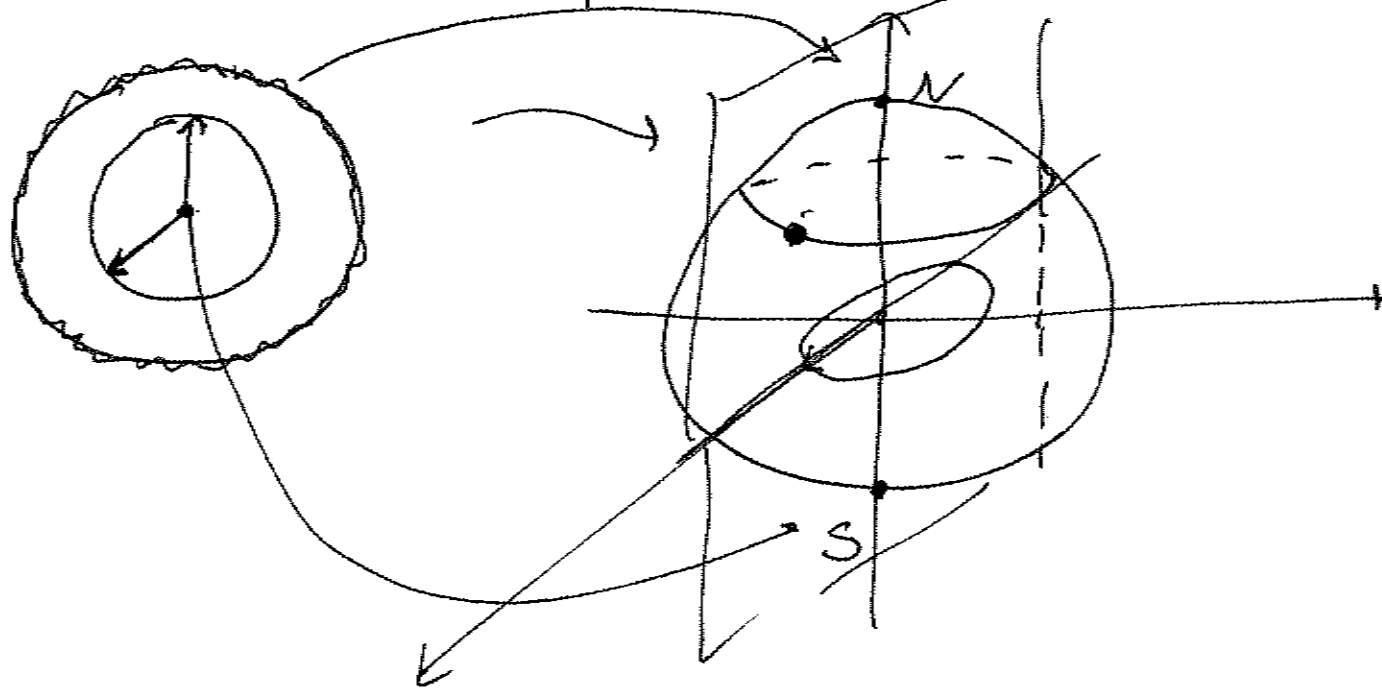
$$(x, y) \in D$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

↑
sarà la mia z
voglio che

$$(0, 0) \longrightarrow S$$

$$\partial D \longrightarrow N$$

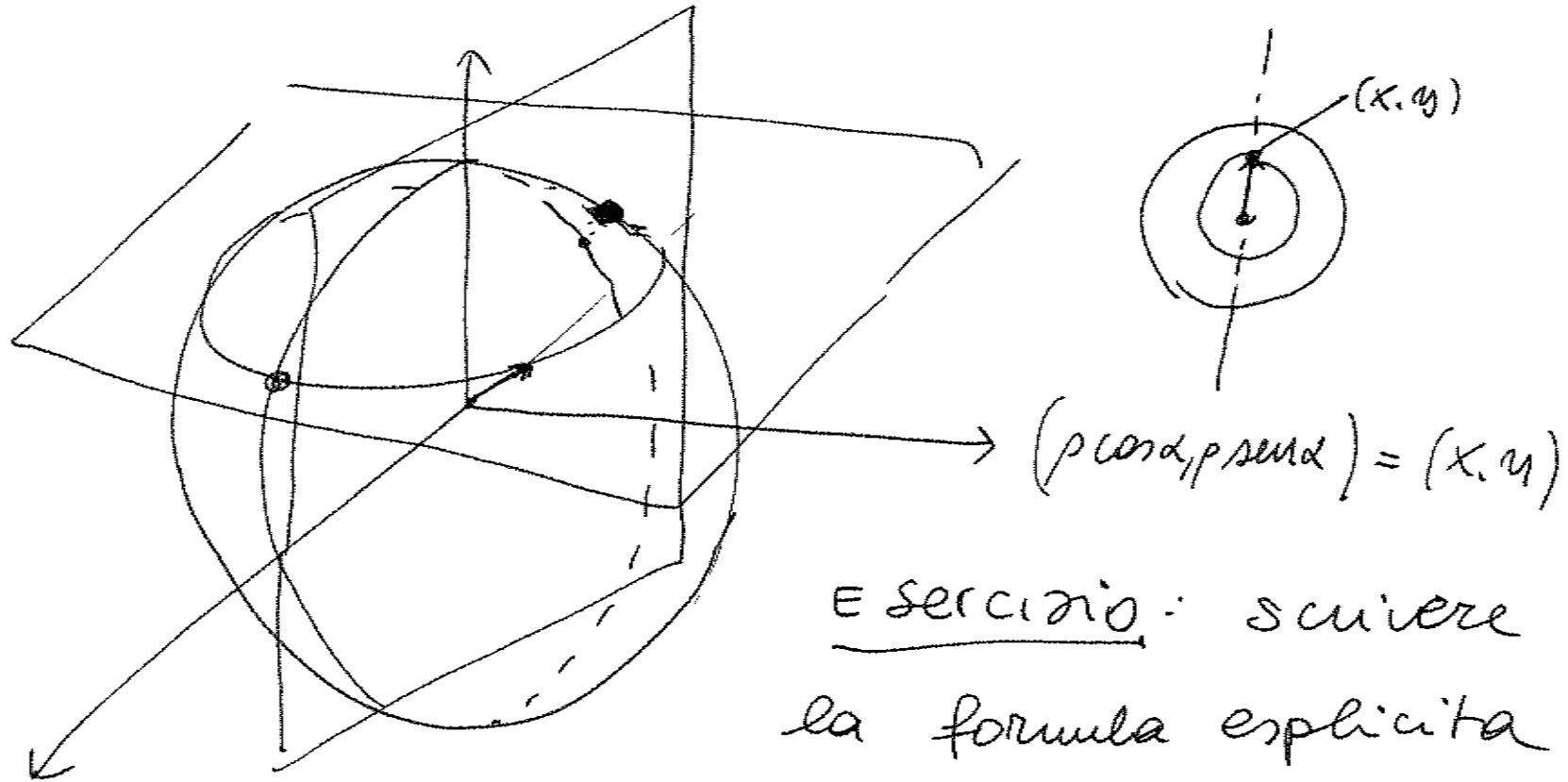


Dato $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voglio prendere piano generato

⑦

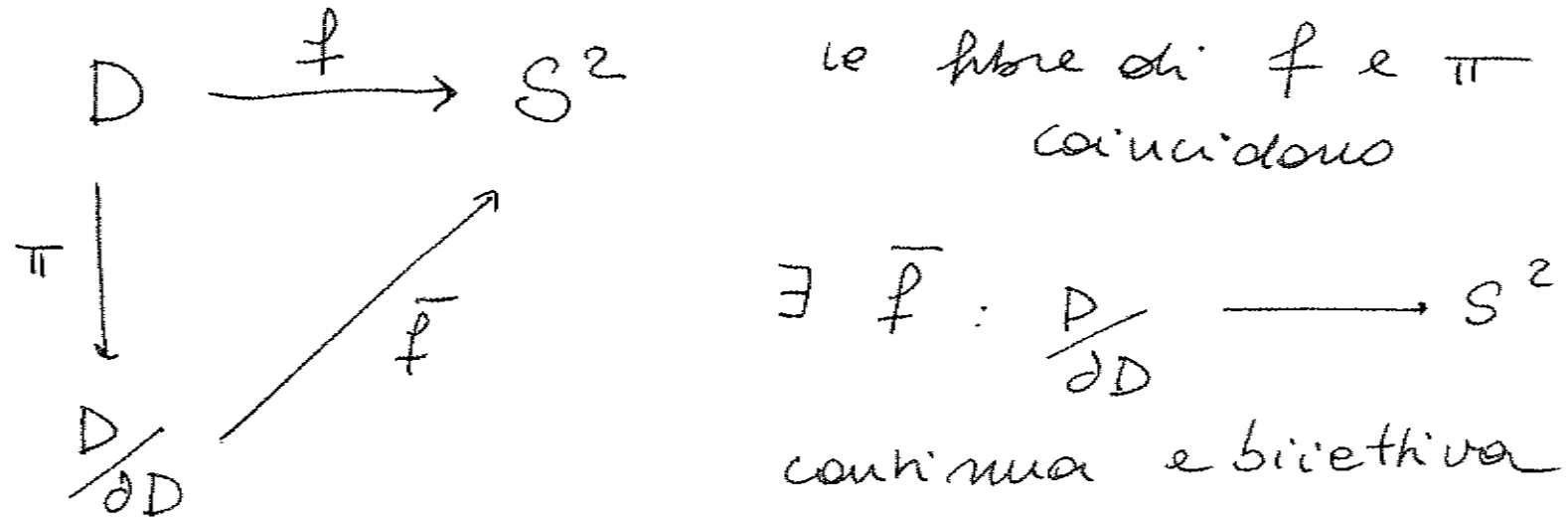
da $(x, y, 0)$ e l'asse z

e intersecarlo con S^2 ^{poi} $\leadsto$ fissare z come scelto



Esercizio: scrivere
la formula esplicita
di questa applicazione

(8)



D'altra parte f è chiusa $\Rightarrow \bar{f}$ è chiusa
 quindi $\bar{f}$ è omeomorfismo.

f chiusa lo si può vedere in modo veloce
 tra poco: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto (chiuso e limitato)
 e $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ è T2

Ogni applicazione continua da un compatto a un T2 è

sempre chiusa

9

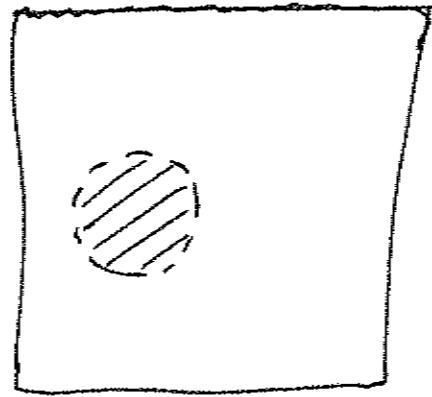
$$\underline{\text{ES}} \quad Q = [-1, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \partial Q$$

$$\mathcal{B} = \{ B_r^e(p) \cup \partial Q \mid B_r(p) \subset Q \setminus \partial Q \} \cup \{Q\}$$

1) $\mathcal{B}$ è base per una topologia su Q ?

usiamo lemma
della base:

$\mathcal{B}$ è base per τ_B
se e solo se



$$1) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = Q \quad \underline{\text{OK}}$$

$$\forall (x, y) \in Q \quad \text{ o } \quad (x, y) \in \partial Q \Rightarrow (x, y) \in B \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

oppure $(x, y) \notin \partial Q$

(10)

$\exists B_r((x, y)) \text{ t.c. } B_r((x, y)) \subseteq Q \setminus \partial Q$
($\exists r > 0$)

perché $Q \setminus \partial Q$ è
un aperto

$$\Rightarrow B_r((x, y)) \cup \partial Q \in \mathcal{B}$$

$\nwarrow$
 (x, y)

2) deve valere che $\forall A, B \in \mathcal{B}$

$$\forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in C \subseteq A \cap B$$

prendo $A, B \in \mathcal{B}$ $A = B_r(p) \cup \partial Q$ e $B = B_{r'}(p') \cup \partial Q$

non è
limitativo
supporre che

per certi $r, r' > 0$ $p, p' \in Q \setminus \partial Q$

$$B_r(p) \cap \partial Q = \emptyset$$

$$B_{r'}(p') \cap \partial Q = \emptyset$$

pu ipotizz.

$$A \cap B = (B_r(p) \cap B_{r'}(p')) \cup \partial Q$$

Dato $x \in A \cap B$ se $x \in \partial Q$ pseudo

(11)

$$x \in \partial Q \subseteq A \cap B$$

$\in \mathcal{B}$

$$\text{se } x \notin \partial Q \Rightarrow x \in (B_r(p) \cap B_{r'}(p'))$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \quad B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(p) \cap B_{r'}(p')$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in \partial Q} B_\varepsilon(x) \cup \partial Q \in \mathcal{B}$$

Oss. in generale se pseudo

X ~~non~~ spazio topologico

$\mathcal{B}$ base per X $S \subseteq X$ sottoinsieme

$\mathcal{B}_S := \{ B \cup S, B \in \mathcal{B} \}$ è una base
per una
topologia su X

però in generale una topologia diversa
da quella di partenza!

(72)

b) trovare. $\overset{\circ}{\partial}Q$ $\overline{\partial Q}$



$\partial Q \in \mathcal{B}$ quindi è aperto con

questa topologia, che chiamo τ

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\partial}Q = \partial Q$$

$$\overline{\partial Q} = ?$$

$$\mathcal{B} = \{ B_r(p) \cup \overset{\circ}{\partial}Q, \\ \overset{\circ}{Q} = \overset{\circ}{Q} \cup \overset{\circ}{\partial}Q \}$$

ogni aperto $\neq \emptyset$ di τ

contiene ∂Q per def.

perché ogni elemento di $\mathcal{B}$ lo contiene

$\Rightarrow$ ogni chiuso $\subsetneq Q$ ha intersezione non vuota con ∂Q

L'unico chiuso che lo contiene è Q

$$\Rightarrow \overline{\partial Q} = Q$$

$$\rightarrow E := Q \setminus \partial Q = \overset{\circ}{Q} \text{ sono } \underline{\text{te}}$$

$\overset{\circ}{E}$ il più aperto contenuto in E

ma tutti gli aperti non molti contengono ∂Q

$\Rightarrow$ l'unico aperto contenuto in E è $\emptyset$

$$\overset{\circ}{E} = \emptyset$$

$$\overline{E} = ? \quad Q \setminus E = \partial Q \in \mathcal{T}$$

quindi E è chiuso: $\boxed{\overline{E} = E}$

$$\rightarrow B_{1/2}(0,0) =: A$$

$\overset{\circ}{A} = \emptyset$ come nel caso precedente



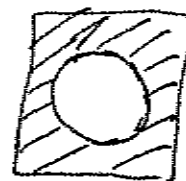
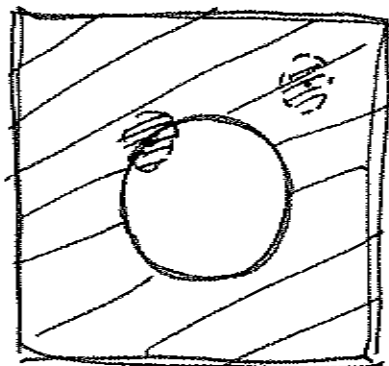
$\bar{A}$ $\mathbb{Q} \setminus A$ non è aperto

(14)

$$\bar{A} = \mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q} \setminus A)^\circ$$

se prendo

$$\tilde{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

 $\mathbb{R}^2$ 

$\mathbb{Q} \setminus \tilde{A}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Q} \setminus \tilde{A} \subseteq \mathbb{Q} \setminus A$

ed è il più grande aperto contenuto in $\mathbb{Q} \setminus A$:

infatti:

$$\left[\begin{array}{l} \text{se prendo } (x, y) \in \mathbb{Q} \setminus A \setminus \mathbb{Q} \setminus \tilde{A} \Rightarrow (x, y) \in \{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon((x, y)) \cap (\mathbb{Q} \setminus A) \neq \emptyset \end{array} \right]$$

(15)

$\Rightarrow \mathbb{Q} \setminus \tilde{A}$ è la parte interna di $\mathbb{Q} \setminus A$

$$(\mathbb{Q} \setminus A)^\circ = \mathbb{Q} \setminus \tilde{A} = \{ (x, y) \in \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \}$$

$$\bar{A} = \mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \tilde{A}) = \mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \tilde{A}) = \tilde{A} =$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \} = \overline{B}^{\text{te}}$$

notiamo che negli
altri con questa
uguaglianza non vale!

c) Questo spazio $(\mathbb{Q}, \tau)$
è T_2 , T_1 o T_0 ?

dettagli a voi



T_1 e $T_2 \leftrightarrow$ basta prendere punti che stanno
entrambi nel bordo
dimmi

Anche per T_0 !