

Foglio 3 7) X, Y spazi topologici

$f: X \rightarrow Y$ continua suriettiva

$$R = \{ (x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \}$$

(a) Se $Y \in T_2 \Rightarrow R$ è chiuso in $X \times X$.

vale che: $Y \in T_2 \Leftrightarrow \Delta = \{ (y, y), y \in Y \} \subseteq Y \times Y$
è chiusa

considero $X \times X \xrightarrow{f \times f} Y \times Y \ni \Delta$

so che: $f \times f$ è continua (perché f lo è)

Dunque $(f \times f)^{-1}(\Delta)$ è chiuso in $X \times X$

$$\begin{aligned}
 (f \times f)^{-1}(\Delta) &= \{ (x, x') \in X \times X \mid (f \times f)(x, x') \in \Delta \} \quad \textcircled{2} \\
 &= \{ (x, x') \in X \times X \mid (f(x), f(x')) \in \Delta \} \\
 &= \{ (x, x') \in X \times X \mid \text{cioè} \quad f(x) = f(x') \} = R
 \end{aligned}$$

(b) Esempio in cui R sia chiuso ma Y non T_2 ?

Attenzione: $Y T_2 \Rightarrow R$ chiuso (a)

(b) dice che non vale il viceversa di (a)

$$R = \{ (x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \} \subseteq X \times X$$

$f: X \longrightarrow Y$ suriettiva e continua

Proviamo a mettere su X la top. discreta $\mathcal{D}$

OSS: • qualunque appl. f da $(X, \mathcal{D})$ a qualunque Y
è sempre continua

$$\bullet \text{ su } (X, \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O}) = (X \times X, \mathcal{O}) \quad (3)$$

la topologia prodotto indotta da $\mathcal{O}$ su entrambi i fattori è la top. di Sierpinski -

Qualunque f continua da $X \rightarrow Y$

con Y non T_2 soddisfa le ipotesi che vogliamo!

Per fissare le idee prendo $X = \mathbb{R}$

$Y = \{a, b\}$ $\tau_Y = \emptyset$ discreta

(Y, τ_Y) non è T_2

$f: \mathbb{R} \rightarrow Y$ qualunque appl. continua

ad esempio $f(1) := a$

$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) := \{b\}$

f è continua $(\mathbb{R}, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{C})$

④

ovviamente $R \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso purché tutti
risolti insieme lo
sono per $\mathcal{O}$!

(c) Dimostrare che se R è chiuso in $X \times X$
e f è aperta $\Rightarrow Y$ è T2

Quello che sappiamo:

- $R = (f \times f)^{-1}(\Delta)$ è chiuso

- f aperta $\Rightarrow f \times f$ aperta $\rightarrow$ infatti, sia $U \times V \in \mathcal{B}_{X \times X}$
Base canonica
 $f \times f(U \times V)$
" $f(U) \times f(V)$
aperta $\in \mathcal{B}_{Y \times Y}$

- f suriettiva

(notiamo che f
suriettiva nel punto (a)
non serve!)

⑤

f suriettiva $\Rightarrow f \times f$ è suriettiva

→ quello che vogliamo: Δ chiuso in $Y \times Y$

$R = (f \times f)^{-1}(\Delta)$ è chiuso

$(X \times X) \setminus R$ aperto in $X \times X$

$f \times f$ $\rightsquigarrow$ aperta $(f \times f)(X \times X \setminus R)$ è aperto in $Y \times Y$.

$$(f \times f)(X \times X \setminus (f \times f)^{-1}(R)) = (f \times f)(X \times X) \setminus R =$$

$f \times f$ è
suriettiva $\rightsquigarrow = Y \times Y \setminus R$

$\Rightarrow R$ è chiuso in $Y \times Y$ OK

OSS, se avessimo anche $f \times f$ chiuso
avremmo anche le tesi.

MA non è vero in generale che

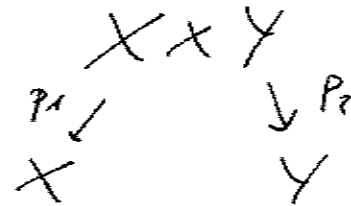
f chiusa $\Rightarrow f \times f$ chiusa

(fatto controesempio!)

⑧ Foglio 3 (parzialmente)

$X \times Y$ è TZ $(\Rightarrow)$ X e Y sono TZ

$\Rightarrow$



prendiamo $x, x' \in X$

$x \neq x'$

sappiamo: fissiamo $y \in Y$

$\exists$ due punti.

$$U \times V, U' \times V'$$

tali che

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = \emptyset$$

$$U \times V \ni (x, y) \quad U' \times V' \ni (x', y)$$

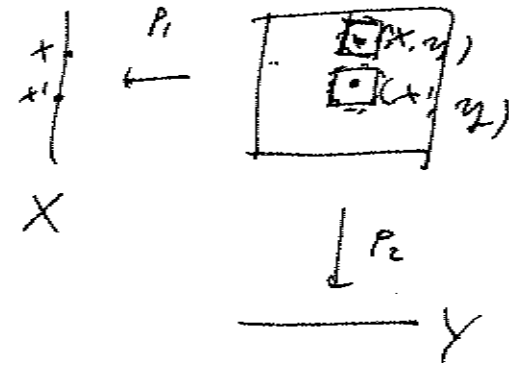
$$\text{osserva. } V, V' \ni y$$

$$\emptyset = (U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times \underbrace{(V \cap V')}_{\neq \emptyset}$$

$$\text{allora deve essere } U \cap U' = \emptyset$$

$$\leadsto X \in T_Z ?$$

Stessa cosa per Y -



(7)

$\boxed{\Leftarrow}$ se X e Y sono TZ allora $X \times Y$ lo è

(8)

$(x, y), (x', y') \in X \times Y$ distinti

$\Rightarrow$ o $x \neq x'$
oppure (oel) $y \neq y'$

$\exists V, V'$ aperti in Y
 $V \cap V' = \emptyset$

$y \in V \quad y' \in V'$

$\exists U, U' \quad U \cap U' = \emptyset$
 $x \in U, x' \in U'$ aperti in X
prendo
 $(x, y) \in U \times V \quad (x', y') \in U' \times V'$
aperti distinti

$\Rightarrow X \times V$ e $X \times V'$ aperti in $X \times Y$

distinti: $(x, y) \in X \times V$
 $(x', y') \in X \times V'$

(9)

Fate vol: $\boxed{T_0, T_1}$

⑮ foglio 3

⑨

$(\mathbb{R}, \tau_e)$. Trovare $Y \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{R}/Y$ sia T_2

Trovare $Z \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{R}/Z$ non sia T_2

Ricordate:

$W \subseteq X$ $\frac{X}{W}$ contrazione di W ad un punto
" $\frac{X}{\sim}$ $x \sim y$ sse $\begin{cases} x=y \\ \text{oppure} \\ x, y \in W \end{cases}$

• $Y = \{1\}$ un punto

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R}/\{1\} = \mathbb{R}$$

e $\mathbb{R}_e$ T_2

$x \sim y$ sse $x=y$

oppure

$x, y \in \{1\}$

cioè $x=y=1$

$x \sim y$ sse $x=y$

• punto $z = (0, 1) \in \mathbb{R}$

(10)

se $\mathbb{R}/(0, 1)$ $\pi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/(0, 1)$

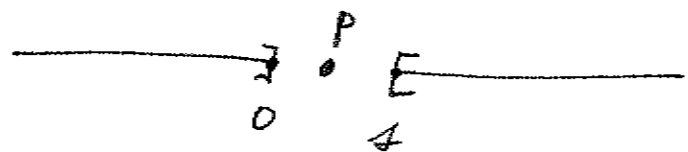
forse T2 in particolare sarebbe T1 (i punti chiusi!)

$P = [(0, 1)] \in \mathbb{R}/(0, 1)$

$\pi^{-1}(P) = (0, 1)$ che non è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

$\Rightarrow P$ non è chiuso in $\mathbb{R}/(0, 1)$ per def di topologia quoziente!

$\mathbb{R}/(0, 1)$ non è T1 (OK)



vedete per esercizio che
ogni intorno aperto di $q = [0]$
contiene p