ESERCITAZIONI

22 novembre 2017

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$$

visto: e è identificazione aperta

~~1)~~

1) $\underset{f}{\overset{\shortparallel}{e_{|[0,1]}}} : [0,1] \longrightarrow S^1$ è identificazione chiusa:

Basta vedere che è chiusa (sappiamo che è suriettiva e continua)

$C \subseteq [0,1]$ chiuso $\quad f(C) \subseteq S^1$ è chiuso?

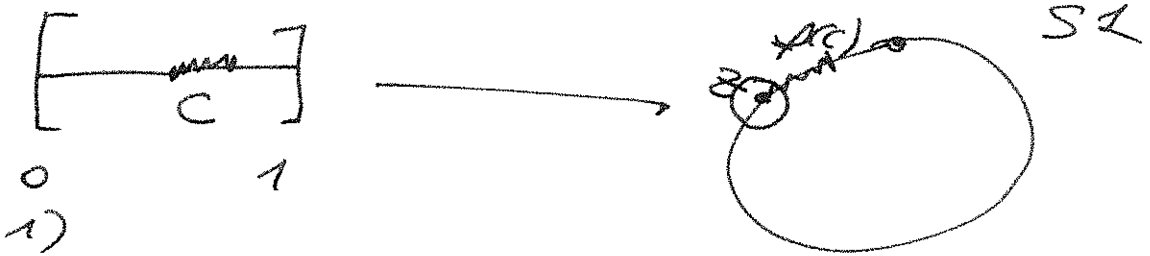
sappiamo: $\quad f(C) = f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}$

vogliamo vedere che vale $=$

supp. per assurdo che $\exists \; z \in \overline{f(C)} \setminus f(C)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(z) \cap f(C) \neq \emptyset \quad$ ma $z \notin f(C)$

$f^{-1}(z) \in [0,1]$



supp che $f^{-1}(z) = p \in (0,1)$

(altrimenti è $\{0,1\}$)

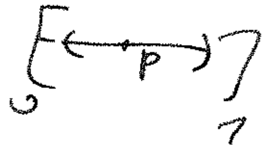
prendo $r>0$ $(p-r, p+r) \cap C$

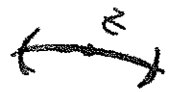
voglio vedere che non è vuoto

$\exists\, r>0$ tale che

$f|_{(p-r,\,p+r)}$ è omeomorfismo

$$f((p-r,\,p+r)) = B_\varepsilon(z) \cap S^1$$





per un certo $\varepsilon > 0$

Ma $\quad B_\varepsilon(z)\cap S^1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ allora lo è anche $(p-r,\, p+r)\cap C$

se invece $f^{-1}(z)=\{0,1\}$

allora $\exists\, r>0$

tc $[0,r)\cup(1-r,1]$

è aperto che contiene $\{0,1\}$ $\qquad z=(1,0)$

e tale che

$$f\big([0,r)\cup(1-r,1]\big) = B_\varepsilon(z)\cap S^1 \neq \emptyset$$

e $f|_{[0,r)\cup(1-r,1]}$ è biiettiva

$$\Rightarrow \big([0,r)\cup(1-r,1]\big)\cap C \neq \emptyset$$

Allora se $f^{-1}(z) = p$ $\quad p \in \overline{C} \Rightarrow p \in C$

se $f^{-1}(z) = \{1, 0\}$ $\quad \Rightarrow$ o $1 \in \overline{C} \Rightarrow 1 \in C$
o $0 \in \overline{C} \Rightarrow 0 \in C$

$$\Rightarrow \quad f(f^{-1}(z)) = z \in f(C)$$

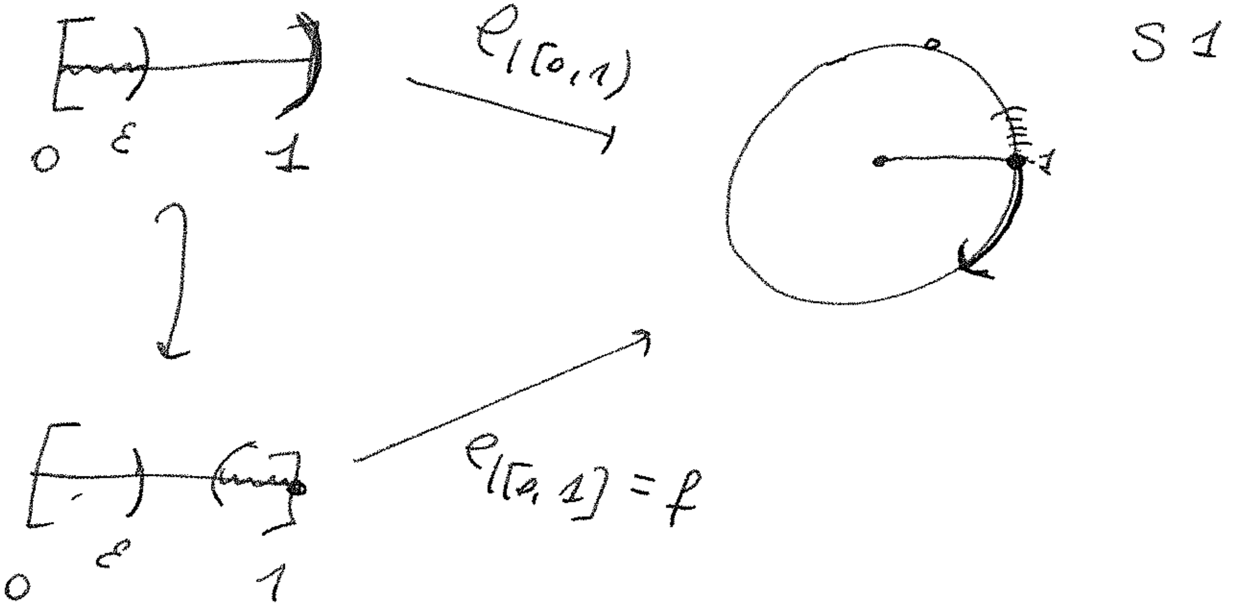
Vedremo che con le nozioni di compattezza e di T2 si può dare dimostrazione alternativa veloce!

2) $e_{|[0,1)} : [0,1) \longrightarrow S^1$ sempre appl. continua e suriettiva

è anche biiettiva

Ma non è una identificazione.

<u>Oss</u>: equivale in questo caso a chiedere che sia un omeomorfismo!



$g = e_{|[0,1)}$

non è un'identificazione:

$[0, \frac{1}{2}) \subseteq [0,1)$ è aperto ed è saturo per g

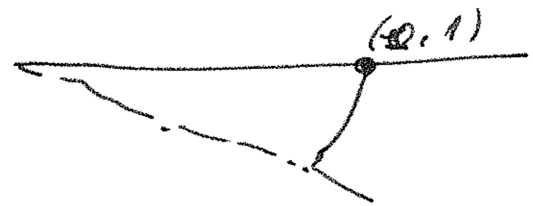
$\quad \| \qquad\qquad\qquad$ (qualunque sottoinsieme lo è rispetto a g!)

$g^{-1}(g([0, \frac{1}{2}))$

$\Rightarrow g([0, \frac{1}{2}))$ semiarco <u>NON</u> aperto in S^1

dovrebbe essere aperto in S^1 se s'avesse la topologie quoziente!

$\Rightarrow$ g non è una identificazione



Quindi abbiamo visto un controesempio alla seguente affermazione:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[ur, "f \circ i"'] & \end{tikzcd}$$

f identificazione X, Y sp. top. $Z \subseteq X$ i inclusione

non è vero che $f \circ i$ è necessariamente una identificazione!

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] & S^1 \\ {[0,1)} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

f è ident.

g) non lo è!

3) la composizione di identificazioni è un'identificazione

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

f, g identificazioni: sono suriettive e topologia su Y è top. quoz. indotta da f e top. su Z è top. quoziente indotta da g

TS: $g \circ f$ è identificazione: $g \circ f$ suriettiva ok

- top. su Z è top. quoziente indotta da $g \circ f$:

U aperto in $Z \iff g^{-1}(U)$ aperto in $Y \iff f^{-1}(g^{-1}(U))$ aperto in X

$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$

g identificazione

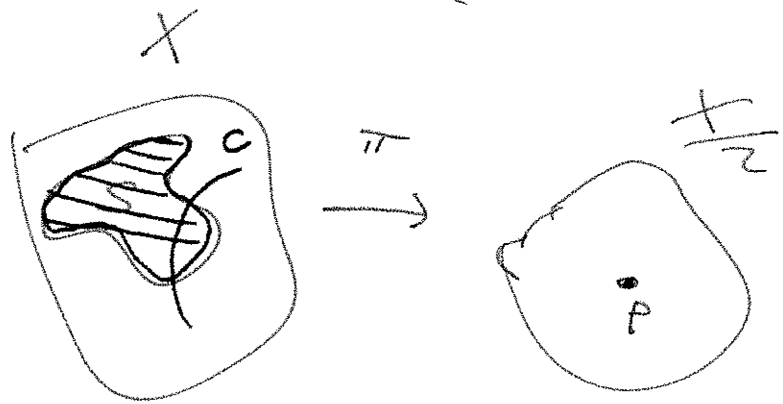
f è identificazione

4) X sp. top. $S \subseteq X$ chiuso/aperto

Dimostrare che $\pi : X \longrightarrow X/S$ è chiusa/aperta

$X/S = \{ [x] \text{ classi di eq.} \}$ $\quad x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ \text{o} \\ x, y \in S \end{cases}$

$= (X \setminus S) \cup \{ \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{[s]} \}$



C chiuso in X

$\pi(C)$ è chiuso in $\underset{\overset{\shortparallel}{X/S}}{X/\sim}$?

$\pi(C)$ è chiuso $\iff$ $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso in X

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \begin{cases} C & \text{se } C \cap S = \emptyset \\ C \cup S & \text{se } C \cap S \neq \emptyset \end{cases}$$

se S è chiuso $C \cup S$ è chiuso

$\Rightarrow$ $\pi(C)$ è chiuso in X/S

stessa cosa se S è aperto $\Rightarrow$ π è aperta

5) la condizione nell'esercizio prima è anche necessaria?

OSS $(X, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{concreta}}}{\mathcal{C}}) \xrightarrow{f} Y$ f suriettiva Y spazio top.

$\Rightarrow$ f è sempre chiusa e aperta.

$\forall$ C chiuso in X $\rightsquigarrow$ $C = \emptyset, X$

$$f(C) = \begin{cases} \emptyset & \text{chiuso} \\ f(X) = Y & \text{chiuso} \end{cases}$$

allo stesso modo f è aperta

prendo X con $|X| > 1$ con topologia concreta

prendo qualunque $\underset{\emptyset}{S} \underset{\neq}{\overset{\subseteq}{\neq}} X$ $\quad X \xrightarrow{\pi} X/S$

è aperta e chiusa

ma S non è né aperto né chiuso.

6) X $T1$ cioè i punti sono chiusi

$S \subseteq X$

che condizioni devo mettere su S affinché

X/S sia $T1$?

sicuramente una condizione <u>necessaria</u> è

che S sia chiuso:

$$\pi(S) = p \quad \text{punto}$$

$$\pi^{-1}(p) = S$$

$\{p\}$ è chiuso in X/S $\iff$ $\pi^{-1}(p) = S$ è chiuso in X

È sufficiente che S sia chiuso?

Supponiamo che S sia chiuso (allora p è chiuso)

mi chiedo se sono chiusi gli altri punti

$q \neq p$ in X/S $\quad$ $\pi^{-1}(q) = \{r\}$ chiuso in X perché X è $T1$!

$\iff$ q è chiuso in X/S

$(X\ T1 + S \text{ chiuso}) \iff (X/S\ T1)$

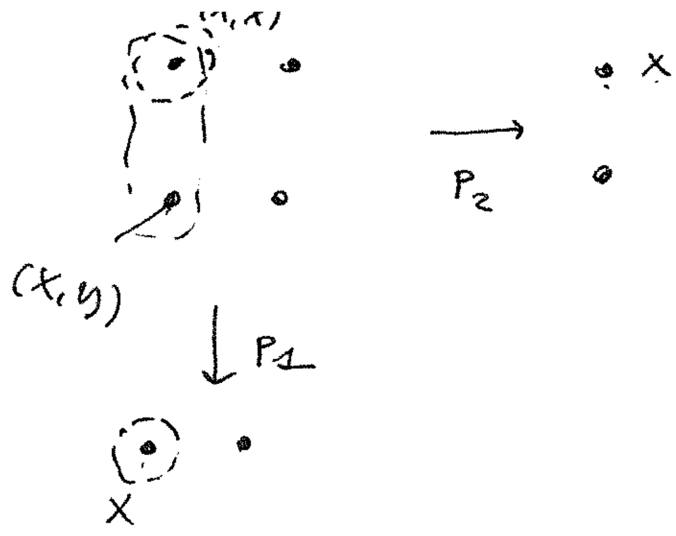
---

7) $Y = \{x, y\}$

Esibire, se esiste, una topologia su $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto $(Y, \tau_1) \times (Y, \tau_2)$

- approccio enumerativo
  al più di topologie prodotto così ne ho 16
  basta che ci siano > 16 topologie su un insieme di 4 elementi e abbiamo vinto

- $$\begin{tikzcd} & Y \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$
  sappiamo che le proiezioni p_i sono continue e anche aperte



Se trovo topologie su $Y \times Y$ con $\{(x,x)\}$ aperto

ma $p_1^{-1}(x) = \{(x,x),(x,y)\}$

non aperto

di certo non è una topologia prodotto

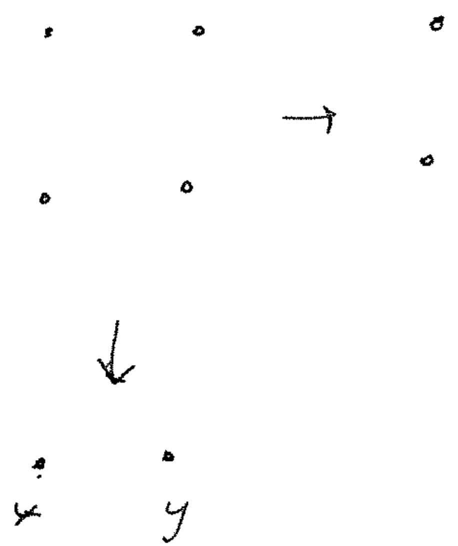
perché se lo fosse $p_1(\{(x,x)\}) = x$ sarebbe aperto perché p_1 è aperta

$\Rightarrow$ $p_1^{-1}(x)$ aperto in $Y \times Y$ perché p_1 è continua

$p_1^{-1}(x) = \{(x,x),(x,y)\}$ assurdo

Prendo dunque $\tau = \{ Y \times Y, \emptyset, \{(x,x)\} \}$ ok

OSS.



$(Y,\mathcal{C}) \times (Y,\mathcal{C}) = ((Y \times Y), \mathcal{C})$

Base canonica per questa topologia è

$\{ Y \times Y \}$ per definizione

vs def. top. concreta

---

8) T0 + T3 => regolare (= T1 + T3)

T0 $\forall x, y$ con $x \neq y$ $\exists\, U$ tc $x \in U$ $y \notin U$ oppure $y \in U$ e $x \notin U$

T1 punti chiusi $\iff$ $\forall x, y$ con $x \neq y$ $\exists\, U \ni x,\ V \ni y$ tc $x \notin V$ e $y \notin U$

T3 "separo chiusi e punti"

$\forall C$ chiuso $\forall\, p \notin C$ $\exists\, U, V$ $U \supseteq C$ $V \ni p$ $U \cap V \neq \emptyset$

Basta vedere che $T_0 + T_3 \Rightarrow T_1$

(sappiamo che saranno necessarie tutti e due)

voglio vedere che $\forall x \in X$ spazio $T_0 + T_3$

voglio vedere che x è <u>chiuso</u>

sapp<u>iamo</u> $T_0 \iff$ punti distinti hanno chiusure distinte

per assurdo sia $x \in X$ non chiuso

$\Rightarrow \exists\, y \in X$ tc $y \neq x$ $\quad y \in \overline{\{x\}}$

$y \notin (X \setminus \{x\})^{\circ}$ $\quad \forall\, \underset{\text{aperto}}{U} \ni y \Longrightarrow x \in U$

X <u>è T_0</u> $\Rightarrow \exists\, V \ni x$ e $V \not\ni y$

$y \in \underset{\text{chiuso}}{X \setminus V}$ $\qquad x \notin X \setminus V$

X è T3 $\quad \exists\, W$ aperto tc

$$y \in X \setminus U \subseteq W$$

$\exists\, A$ aperto tc $x \in A$ e $W \cap A = \emptyset$

Abbiamo l'assurdo perché W è intorno aperto di y che non contiene x

Esercizio: trovate dimostrazioni alternative!