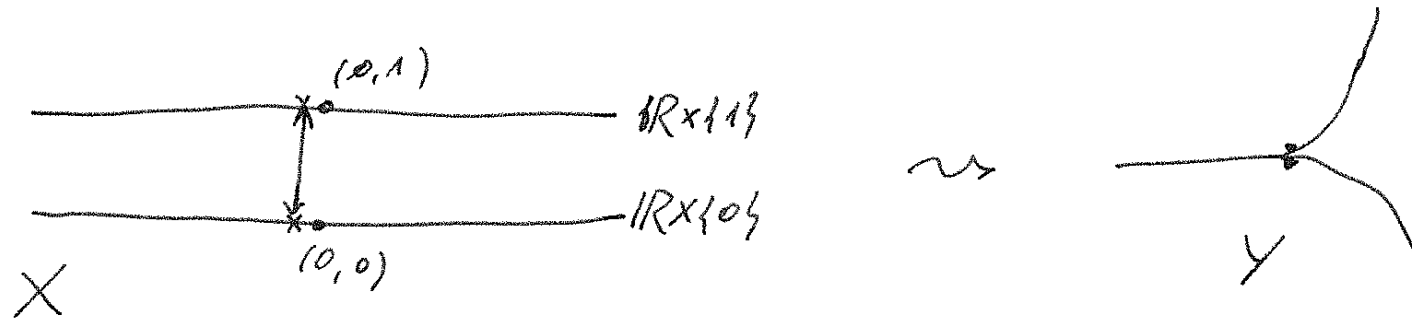


21 novembre 2017⁽⁴⁾

Esempio importante "lingua biforcute"



$$X = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{con } \tau_e$$

introduce su X rel di equivalenza:

$$x, y \in X \quad \dots \quad \begin{array}{c} x \sim y \\ \text{"} \\ (x_1, x_2) \quad (y_1, y_2) \end{array} \quad \text{sse} \quad \begin{array}{l} x = y \\ \text{oppure} \\ x_1, y_1 < 0 \\ x_1 = y_1 \end{array}$$

$$\pi: X \longrightarrow X/\sim =: Y$$

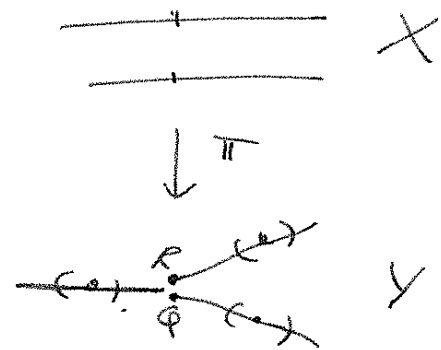
$$x \longmapsto [x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

Considero $Y := X/\sim$ con topologia quoziente
 indotta da $X \xrightarrow{\pi} Y$

③

per def le topologie su Y e:

$$\pi_* \mathcal{T}_X = \left\{ U \subseteq Y \mid \pi^*(U) \in \mathcal{T}_X \right\}$$



vale che:

$$\rightarrow \forall p \in Y \text{ con } p \neq [(0,0)] = Q \\ \neq [(0,1)] = R$$

$$\exists U \in \pi_* \mathcal{T}_X \text{ t.c. } p \in U \text{ e}$$

$$p \neq Q, R$$

$$U \sim (a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

ma per cui
 a, b
 $a < b$

$$\pi^{-1}(p) = \left\{ y \in X \text{ t.c. } \pi(y) = p \right\}$$

se $\pi^{-1}(p) =$ un solo punto $= (x_1, x_2)$

(3)

allora $\underline{x_1 > 0}$ $x_2 = 0$
 prendo $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \text{ t.c.}$ $\begin{matrix} \text{per} \\ \text{fissare} \\ \text{idell} \end{matrix}$

$$x_1 \in (a, b) \quad a > 0$$

allora $(a, b) \times \{0\}$
 è aperto saturo

$$\pi^{-1}(\pi((a, b) \times \{0\})) = (a, b) \times \{0\}$$

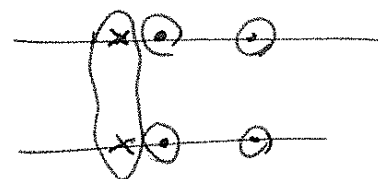
$$\Rightarrow \underbrace{\pi((a, b) \times \{0\})}_{\mathcal{U}} \text{ è aperto in } \pi^* \mathbb{C} X$$

$$\pi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \begin{matrix} \text{continuo} \\ \text{biettiva} \end{matrix}$$

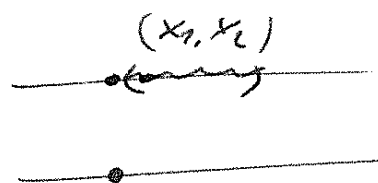
è anche aperto perché

ogni aperto contenuto in $(a, b) \times \{0\}$ è saturo!

$$\Rightarrow \pi|_{(a, b) \times \{0\}} : (a, b) \times \{0\} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \begin{matrix} \text{è omeomorfismo} \\ \text{che circola} \end{matrix}$$



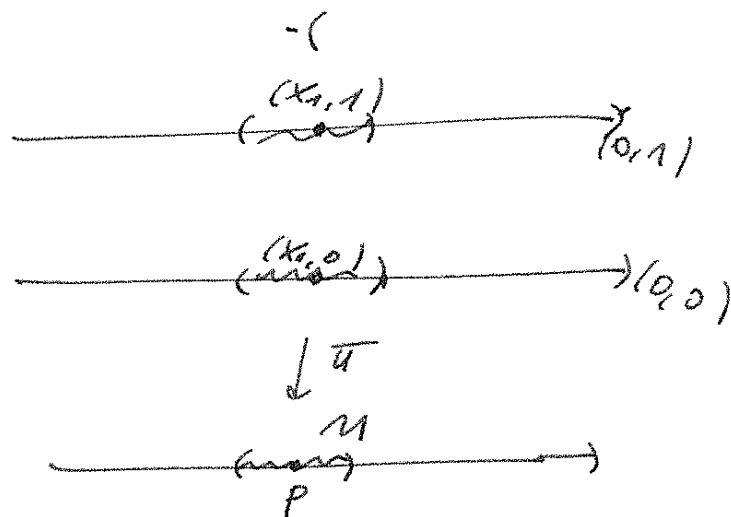
Uomi di equivalenza



ovviamente $(a, b) \times \{0\} \longrightarrow (a, b)$ è omeomorfismo
 $\mathbb{R}^2 \ni (x, 0) \longmapsto x \in \mathbb{R}$

(4)

nell'altro caso: $\pi^{-1}(p) = \{(x_1, 0), (x_1, 1)\}$ $x_1 \leq 0$



prendo $(a, b) + .c.$ $x_1 \in (a, b)$ e $b < 0$

$$\pi((a, b) \times \{0\}) = \mathcal{U}$$

(5)

$$\pi^{-1}(U) = ((a,b) \times \{0\}) \cup ((a,b) \times \{1\}) \in \mathcal{T}_X$$

aperto saturo

$$\pi \Big|_{(a,b) \times \{0\}} : (a,b) \times \{0\} \longrightarrow U$$

è biettiva
continua

è anche aperto:

- lo verifico su base di

aperti per $(a,b) \times \{0\}$:

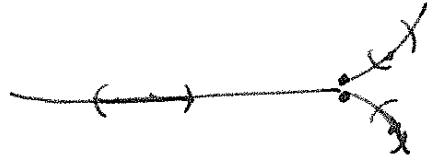
$$(c,d) \quad c \geq a, \quad d \leq b \quad c < d$$

$$\pi^{-1}(\pi((c,d) \times \{0\})) = ((c,d) \times \{0\}) \cup ((c,d) \times \{1\}) \in \mathcal{T}_X$$

OK $\pi((c,d) \times \{0\})$ è aperto in Y

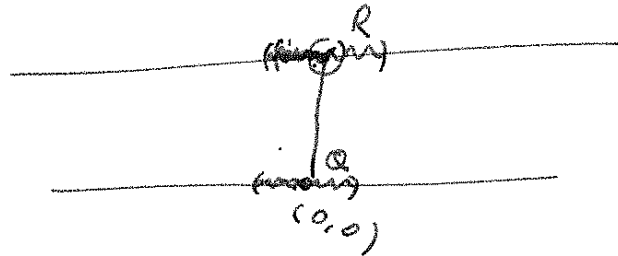
$$\begin{array}{c} \text{--- } (a,b) \text{ ---} \\ \text{--- } (a,b) \text{ ---} \\ \downarrow \pi \\ \text{--- } (a,b) \text{ ---} \\ \text{--- } p \end{array}$$

(6)



sia $\mathcal{U} \subseteq Y$ aperto che contiene $q = \pi(0,0)$

$\pi^{-1}(\mathcal{U})$ aperto in X che contiene $(0,0)$



$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall c \quad (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

quindi $(-\varepsilon, 0) \times \{1\} \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{U})$

per cui: $\forall (x, 1) \quad \text{con} \quad x \in (-\varepsilon, 0)$

$$\pi(x, 1) = \pi(x, 0) \in \mathcal{U}$$

$\Rightarrow U$ aperto in Y che contiene Q

⑦

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \pi((- \varepsilon, 0) \times \{0, 1\}) \subseteq U$$

$$\forall W \text{ aperto in } Y \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \pi((- \delta, 0) \times \{0, 1\}) \subseteq W$$

$$\Rightarrow \forall U \overset{\neq \emptyset}{\text{aperto in } Y} \quad U \cap W \neq \emptyset \\ \forall W \ni p \text{ aperto in } Y$$

Quindi Y non è T_2 : $\forall x, y \in Y$ distinti

$$\exists U \ni x \quad \exists W \ni y \text{ t.c. } U \cap W = \emptyset \\ \text{aperti.}$$

Domanda: $e^- + 1$? Sì lo è: verificatelo

Oss importante: Y non è T_2

ogni sottospazio di $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ è T_2

$\Rightarrow Y$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$!

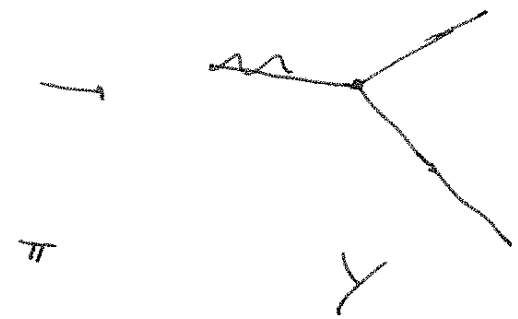
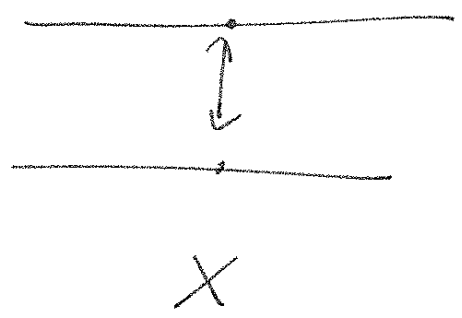
OSS: ESSERE T_2 non è una proprietà che si mantiene necessariamente per passaggio al quoziente!

$$\underset{\text{è } T_2}{X} \xrightarrow{\pi} \underset{\text{non lo è}}{Y}$$

ES se considero

su X " $x \sim y$ " ($\Rightarrow$)
 $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$

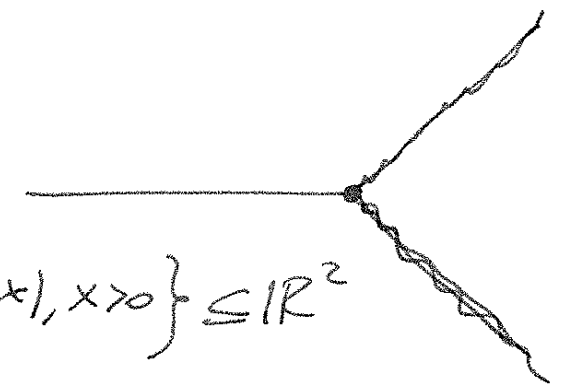
$x = y$
oppure
 $x_1 = y_2 \leq 0$



π

1) $X/\sim$ spazio quoziente è T_2

2) $X/\sim \simeq (\mathbb{R}^{\leq 0} \times \{0\}) \cup \{(x, x), x > 0\} \cup \{(x, -x), x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$



ES $X \xrightarrow{\pi} Y$ primo esempio

2

verifate che π è omeomorfismo locale:

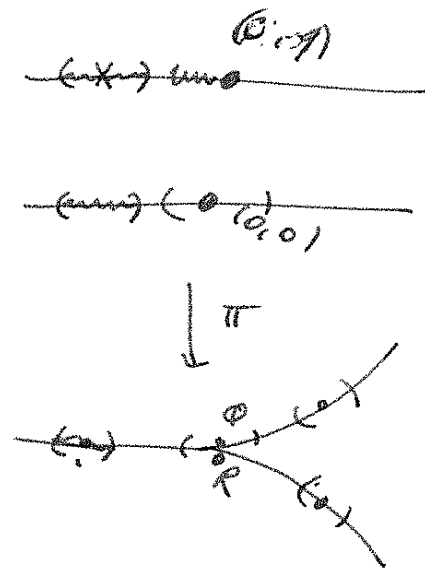
$$\forall x \in X \quad \exists U \ni x \quad \text{aperto} \quad \text{t.c.} \quad \pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$$

sia un omeomorfismo

visto per tutti i punti
diversi da $(0,1)$ e $(0,0)$
per $(0,0)$ per esempio

se considero (a,b)
con $a < 0 < b$

$$\pi^{-1}(\pi((a,b) \times \{0\})) = ((a,b) \times \{0\}) \cup \{(a,0) \times \{1\}\}$$



è un aperto in X !

(10)

$$\pi|_{(a,b) \times \{0\}} : (a,b) \times \{0\} \longrightarrow \mathcal{U} = \pi((a,b) \times \{0\})$$

è bieltica

è continua

è anche aperta

è omeomorfo!

NUOVI (memi oggi!!) ESERCIZI 3

(11)

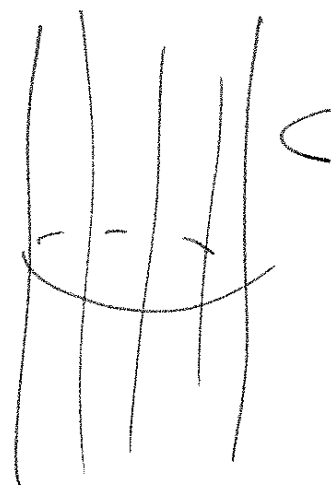
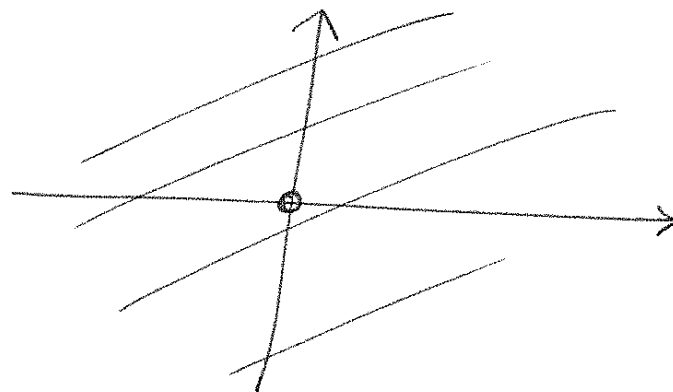
$$1) \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \sim S^1 \times \mathbb{R}$$

verifichiamo anche:

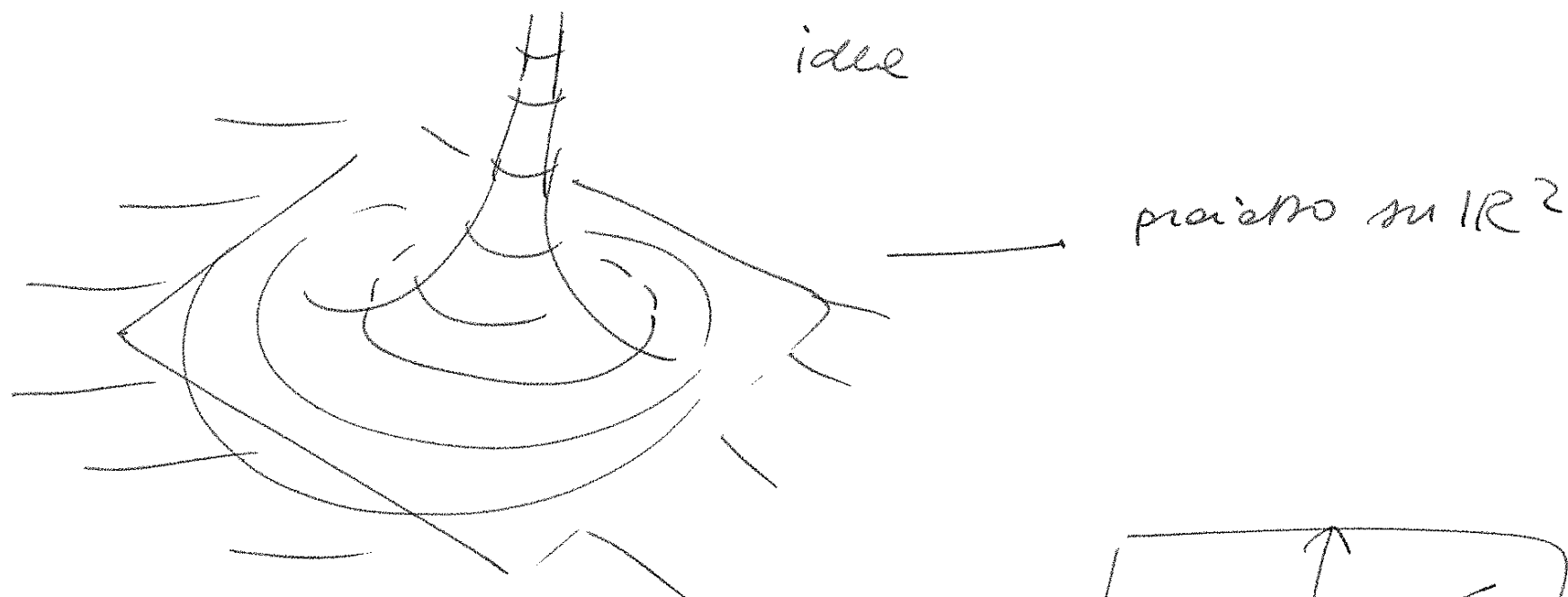
$$S^1 \times \mathbb{R} \sim \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

(x, y, z)
!!
C

cilindro



(12)

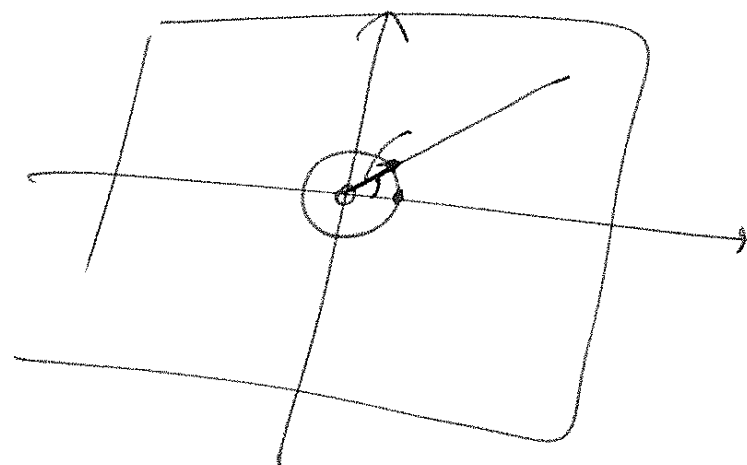


$$S^1 \times \mathbb{R} \stackrel{??}{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

prova $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(x, y) \mapsto (e^{i\vartheta}, \rho)$$

$$\underbrace{(x, y) = \rho e^{i\vartheta}}$$



Ho definito $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{\varphi} S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$ $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (13)

$$(p e^{i\vartheta}) \longmapsto (e^{i\vartheta}, \rho)$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \sqrt{x^2+y^2} \right) \in \mathbb{R}^3$$

è biettiva, continua $\overset{\eta}{\mathbb{R}^2} \quad e^{i\vartheta} = \frac{(x,y)}{(x+iy) \sqrt{x^2+y^2}}$

$$S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$$

η

$$\mathbb{R}^3$$

$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\parallel$

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$e^{i\vartheta} \in S^1$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

scriviamone un'inversa:

$$\psi: S^1 \times \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$(\underset{\psi}{(s,t)}, a) \longmapsto \underset{\psi}{a(s,t)}$$

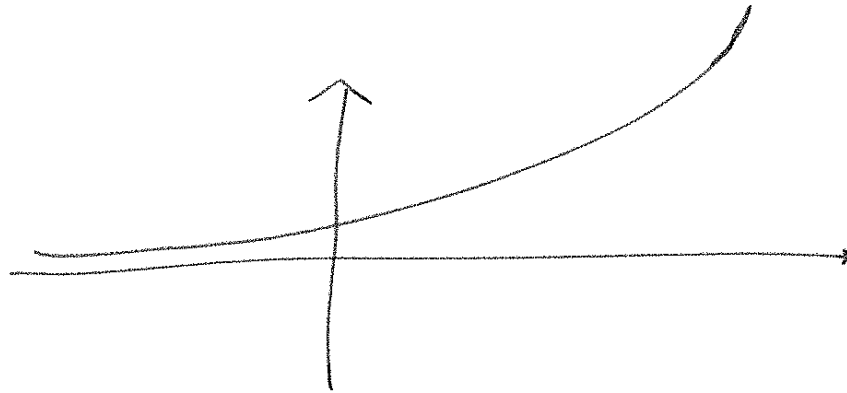
ψ è inversa
di φ ed è continua

Abbiamo quindi che φ è omeomorfismo tra

(14)

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ e } S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$$

Ma ora basta osservare che $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{>0} = (0, +\infty)$



es: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ è omeomorfismo!

$$\simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow[\simeq]{\varphi} S^1 \times \mathbb{R}^{>0} \xrightarrow[\simeq]{\text{id}_{S^1} \times \exp} S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \simeq C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(15)

?

$$S^1 \times \mathbb{R}$$

$S^1 \times \mathbb{R} \simeq C$ è quoniam una
tautologie:

$$(S^1 \times \mathbb{R}) \longrightarrow C$$

$$((x,y), z) \longmapsto (x,y,z)$$

è omeomorfismo!

$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}$

$$(S^1 \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\uparrow} \mathbb{R}^3$$