Esercizi

su $\mathbb{R}$ $\quad \tau = \{ Y \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset \} \cup \{\mathbb{R}\}$

È una topologia su $\mathbb{R}$:

- I $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\quad U_\alpha \in \tau$

  posso supporre che $\quad U_\alpha \cap \mathbb{N} = \emptyset \quad \forall \alpha$

  (se uno degli U_α è $\mathbb{R}$ ok l'unione è $\mathbb{R}$)

  $$\Big(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\Big) \cap \mathbb{N} = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap \mathbb{N}) = \emptyset$$

  $$\Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau$$

- II intersezioni finite ok

(X, τ) è compatto?

Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$

$\exists\, U_{\bar\alpha}$ tc $1 \in U_{\bar\alpha}$ l'unico elemento di τ che contiene 1 è $\mathbb{R}$

$\Rightarrow U_{\bar\alpha} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{U_{\bar\alpha}\}$ è sottoricoprimento finito di $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

sì è compatto.

Notate che (X, τ) ha "tanti" aperti: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ $\{x\}$ è aperto

$\Rightarrow \tau_{|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}} = \mathcal{D}$

connessione di $(\mathbb{R}, \tau)$?

- se $\mathbb{R} = A \cup B$ $\quad A, B$ aperti non vuoti

  in particolare $1 \in A$ o $1 \in B$

  ma allora $A = \mathbb{R}$ o $B = \mathbb{R}$

  allora $A \cap B \neq \emptyset$

  Non posso scrivere $\mathbb{R}$ come unione di aperti disgiunti non vuoti $\Rightarrow$ è connesso.

- Altro modo: $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto $\neq \emptyset$ $\qquad U = \mathbb{R}$ oppure $U \cap \mathbb{N} = \emptyset$

  sia U anche chiuso:

$$\mathbb{R} \setminus U = \begin{cases} \emptyset \ (\Leftrightarrow U = \mathbb{R}) \\ (\mathbb{R} \setminus U) \cap \mathbb{N} = \emptyset \end{cases}$$

cioè $\underline{U \supseteq \mathbb{N}}$

l'unica possibilità è che $U = \mathbb{R}$

è connesso

$\|$

$\mathbb{R}$ non possiede sottoinsiemi propri aperti e chiusi

- $(\mathbb{R}, \tau)$ è 1-numerabile?

È vero che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ sist. fond. di intorni di x numerabile?

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow \{x\} \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow \{x\}$ è aperto

allora $\{\{x\}\}$ è sist. fond. di intorni di x numerabile.

Se invece $x \in \mathbb{N}$ l'unico aperto che contiene x è $\mathbb{R}$

$\{\mathbb{R}\}$ è sist. fond. di intorni di x numerabile.

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ è primo-numerabile.

- $(\mathbb{R}, \tau)$ è 2-numerabile?

Cioè esiste una base per τ numerabile?

Qualunque base $\mathcal{B}$ per τ contiene $\{\{x\},\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\}$ è sottofamiglia non numerabile.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ non è numerabile.

Non è 2-numerabile.

- $(\mathbb{R}, \tau)$ è separabile?

<u>Chiusi</u>: $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso sse $C = \emptyset$

oppure $(\mathbb{R} \setminus C) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

cioè $C \supseteq \mathbb{N}$

<u>oss</u> $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è chiuso $\overline{\mathbb{Q}}^{\tau} = \mathbb{Q}$

quindi $\mathbb{Q}$ non è denso

e dato $\overset{\#}{S} \subseteq \mathbb{R}$ qualunque

$\overline{S}^{\tau}$ com'è fatta?

$$\overline{S}^{\tau} = S \cup \mathbb{N}$$

Allora se S è un sottoinsieme <u>denso</u>

$$\Rightarrow \underbrace{S \cup \mathbb{N}}_{\text{numerabile}} = \overline{S}^{\tau} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{non numerabile}}$$

$\Rightarrow S \supseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ dunque non è numerabile.

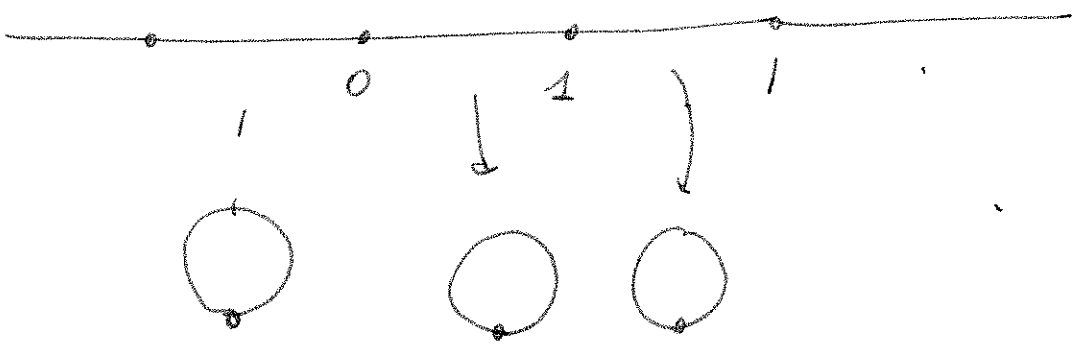
$(\mathbb{R}, \tau)$ non è separabile.

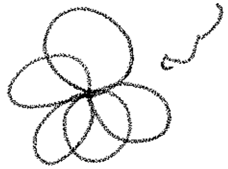
- $(\mathbb{R}, \tau)$ è metrizzabile? NO, basta osservare ~~Siccome è~~ che non è $T2$: ~~Ogni~~ l'unico intorno aperto di 1 è $\mathbb{R}$. (non è neanche $T1$ né $T0$)

ES. $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \iff \begin{cases} x=y \\ \text{oppure } x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}$

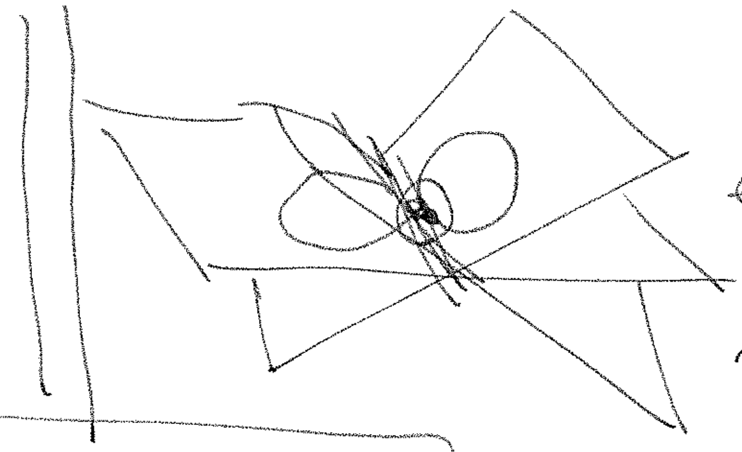
$\mathbb{R}/_{\sim}$ è per def la contrazione a un punto di $\mathbb{Z}$

Vogliamo vedere che non è 1-numerabile





disegno fuorviante



piani per asse x $\subseteq \mathbb{R}^3$

e per $v=(0,0,q)$ $\quad q\in\mathbb{Q}$

questo qui è metrizzabile

ATTENZIONE!

non è il nostro $X = \mathbb{R}/_{\sim}$

Prendo $p = [z] \in X$ $\qquad \pi : \mathbb{R} \longrightarrow X = \mathbb{R}/\sim$

intorni di p: aperti $\quad p \in U \subseteq X \iff \pi^{-1}(U)$ aperto in $\mathbb{R}$

tc $\mathbb{Z} \subseteq \pi^{-1}(U)$

ad esempio: se prendo $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$$

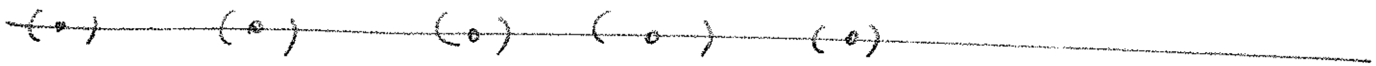
un insieme della forma $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\varepsilon_n + n, n + \varepsilon_n)$

è aperto che contiene $\mathbb{Z}$

Quanti sono?

tanti quanti $\# \left| \left\{ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\} \right| \qquad \left(0, \frac{1}{2}\right)^{\mathbb{Z}}$

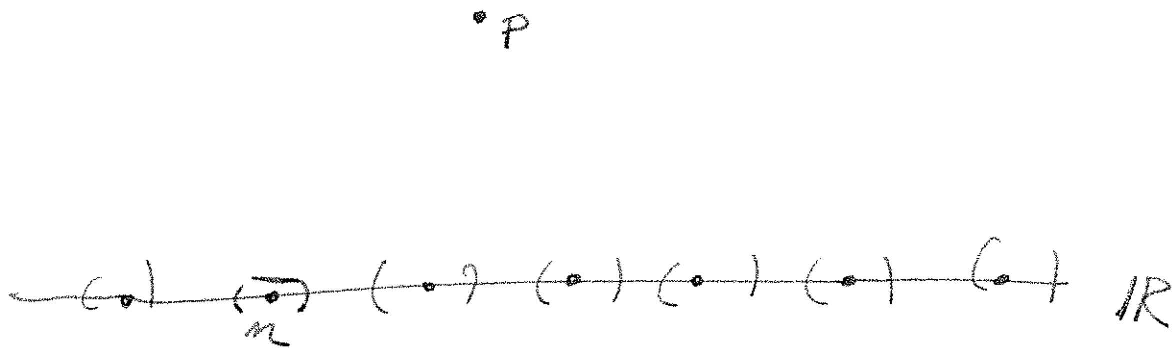
non numerabile



Questo è un esempio di un sist. fond. di intorni di p che non è numerabile.

Dimostriamo che non ne esistono

Supponiamo PA che esista sist. fond. di intorni numerabile: $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$



$\forall n$ $\pi^{-1}(U_n)$ aperto di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$\exists\ d_n \in (0, \frac{1}{2})$ tc

$$(n-d_n,\ n+d_n) \subsetneq \pi^{-1}(U_n)$$

Ho costruito questa sequenza d_n tale che

$W = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-d_n,\ n+d_n)$ è aperto in $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Z}$

è anche saturo: $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$
(perchè $W \supseteq \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ $\pi(W)$ è aperto che

contiene p

però $\nexists$ n tale che $U_n \subseteq \pi(W)$

Infatti,

se avessi che $\exists$ $\bar{n}$ tale che $U_{\bar{n}} \subseteq \pi(W)$

allora

allora

$$\pi^{-1}(U_{\bar{n}})\Big|_{[\bar{n}-\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]} \subseteq W\Big|_{[\bar{n}-\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]} = (n-d_n, n+d_n)$$

$$\not\subseteq$$

$$(n-d_n, n+d_n)$$

Assurdo