1. (e) X $\quad P$ partizione di X

su X topologia che ha P come base

$\sim_P$ su X $\qquad x \sim_P y \iff \exists\ I \in P$ tc $x, y \in I$

$X/{\sim_P}$ spazio quoziente: descriverlo:

punti di $X/{\sim_P}$ sono le classi di equivalenza rispetto a $\sim_P$: esattamente gli elementi di P

Quindi $X/{\sim_P} \underset{\text{biunivoca}}{\longleftrightarrow} P$

Dato $x \in X$ $\quad [x] = I$ dove $I \in \mathcal{P}$ tc $x \in I$

(X, τ) topologia di cui $\mathcal{P}$ è base

su $X/\sim_P$ abbiamo topologia quoziente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ X/\sim_P \end{tikzcd}$$

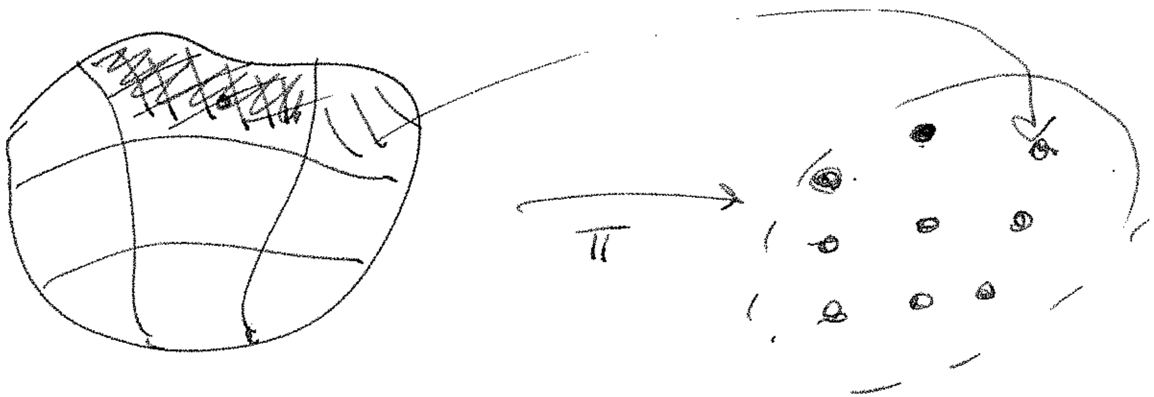
$U \subseteq X/\sim_P$ è aperto / chiuso sse $\pi^{-1}(U)$ è aperto / chiuso

cosa sappiamo:

$I \in \mathcal{P}$ $\quad$ I è aperto in X perché appartiene alla base

($I \subseteq X$ $\quad$ $\mathcal{P} = \{ I_\alpha \}_{\alpha \in A}$ $\quad I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset \ \forall \alpha \neq \beta$

$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = X$)



Dunque, $\forall\ p \in X/_{\sim}$ $\quad p = [x] \quad \pi^{-1}(p) = I$

$x \in I \subseteq X \quad I \in \mathcal{P}$

questo I per def è aperto

allora ogni $p \in X/_{\sim_{\mathcal{P}}}$ è aperto!

$\Rightarrow$ la topologie quoziente su $X/_{\sim_{\mathcal{P}}}$ è $\mathcal{D}$

(la topologie discreta)

2 $X = [-1, 1]$

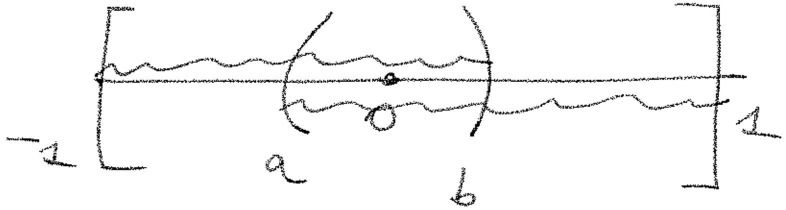
τ : topologie generate da $[-1, b)$ con $b > 0$, $b < 1$

e $(a, 1]$ con $a < 0$, $a > -1$

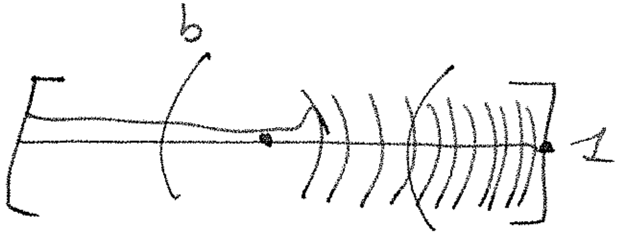
(a) una base

(a, b) $[-1, b)$ $(a, 1]$

....



(b) $([-1, 1], \tau)$ è compatto:



$$\bigcup_{n \geq 1} \left[-1, 1-\frac{1}{n}\right) = [-1, 1)$$

Possibilità 1: Ricordarci che

(X, τ_X) è compatto sse Fissata $\mathcal{B}$ base per τ_X

$\forall$ ricoprimento di X

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

$\exists$ sottoricoprimento finito

$\rightsquigarrow$ possiamo quindi considerare

solo ricoprimenti del tipo: (per punto (a))

$$\{[-1, b_\alpha)\}_{\alpha \in A} \cup \{(a_\beta, 1]\}_{\beta \in B} \cup \{(c_\gamma, d_\gamma)\}_{\gamma \in C}$$

prendo ricoprimento siffatto: $\mathcal{A}$

$$-1 \in X \implies \exists \underset{\vee\atop 0}{b_\alpha} \text{ tc } [-1, b_\alpha) \in \mathcal{A}$$

$$\text{e } 1 \in X \implies \exists a_{\beta_0} \text{ tc } (a_\beta, 1] \in \mathcal{A}$$

6

ora, $[-1, b_\alpha) \cup (a_\beta, 1] = X$

$\Rightarrow \{[-1, b_\alpha), (a_\beta, 1]\}$ è sottoricoprimento finito

<u>Possibilità 2</u>:

Sia $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X

siccome $-1 \in X$ $\quad \exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{A}$ tc $-1 \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ tc $-1 \in B \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow B = [-1, b)$ per qualche $b > 0$

$[-1, b) \subseteq \mathcal{U}$

D'altra parte $1 \in X \Rightarrow \exists\, \mathcal{V} \in \mathcal{A}$ tc $1 \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow \exists\, B' \in \mathcal{B}$ tc $1 \in B' \subseteq \mathcal{V}$ $\quad B' = (a, 1]$ per $a < 0$

$\Rightarrow \mathcal{U} \cup V \supseteq B \cup B' = X$

$X \supseteq$

$\Rightarrow \mathcal{U} \cup V = X$

$\Rightarrow \{\mathcal{U}, V\}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$

(X, τ) è connesso:

$\boxed{\text{esempio}}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{B} = \text{BASE} : \{\underline{(a, b)}$ con $b < 0$ oppure $a > 0\}$

con τ_e $\nexists\ A, B \in \mathcal{B}$ tc $\mathbb{R} \setminus \{0\} = A \cup B$

tuttavia è sconnesso

$\forall\ \mathcal{U}$ aperto in X $\Rightarrow 0 \in \mathcal{U}$ (perché $\forall\ B \in \mathcal{B}$ $0 \in B$)

$\mathcal{U} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \nexists$ coppie di aperti non vuoti disgiunti.

---

(3) (c) $X = \mathbb{R}^2$

$$d^*(P,Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } P = Q \\ d(O,P) + d(O,Q) & \text{se } P \neq Q \end{cases}$$

X non è compatto con questa metrica

<u>visto</u>: (b) d^* induce su $X \setminus \{O\}$ la top. discreta

<u>idea</u>: prendere i punti di $X \setminus \{O\}$ come parte di un ricoprimento.

Devo <u>però</u> sapere se O è chiuso per questa metrica

Se O è chiuso $\{P\} \underset{\text{aperto}}{\subseteq} X \setminus \{O\} \underset{\text{aperto}}{\subseteq} X$

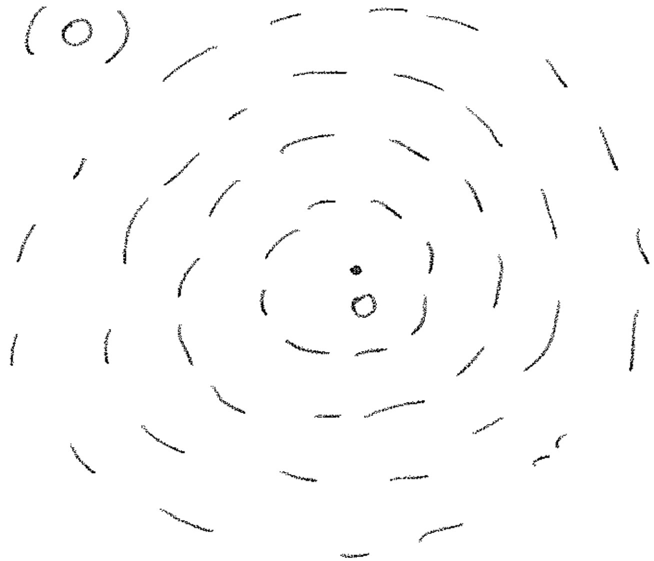
$\Rightarrow \{P\}$ è aperto in X

è una possibilità

ma meglio osservare: $d^*(0,P) = d(0,0) + d(0,P) =$

$= d(0,P)$

quindi $B_r^{d^*}(0) = B_r^{d}(0)$



prendo

$\{B_r^{d^*}(0)\}_{r\in\mathbb{N}^+}$

è ricoprimento aperto in τ di $\mathbb{R}^2$ che non ammette sotto ric. finiti

$\boxtimes$