

ESERCIZI

②

1) Se $X \approx Y$ e X è cpa, allora Y lo è.

Sappiamo: $\exists \varphi: X \rightarrow Y$ cont.

$\exists \psi: Y \rightarrow X$ cont

$\psi \circ \varphi \approx \text{id}_X$ e $\varphi \circ \psi \approx \text{id}_Y$

↙

$X \times I \xrightarrow{F} X$

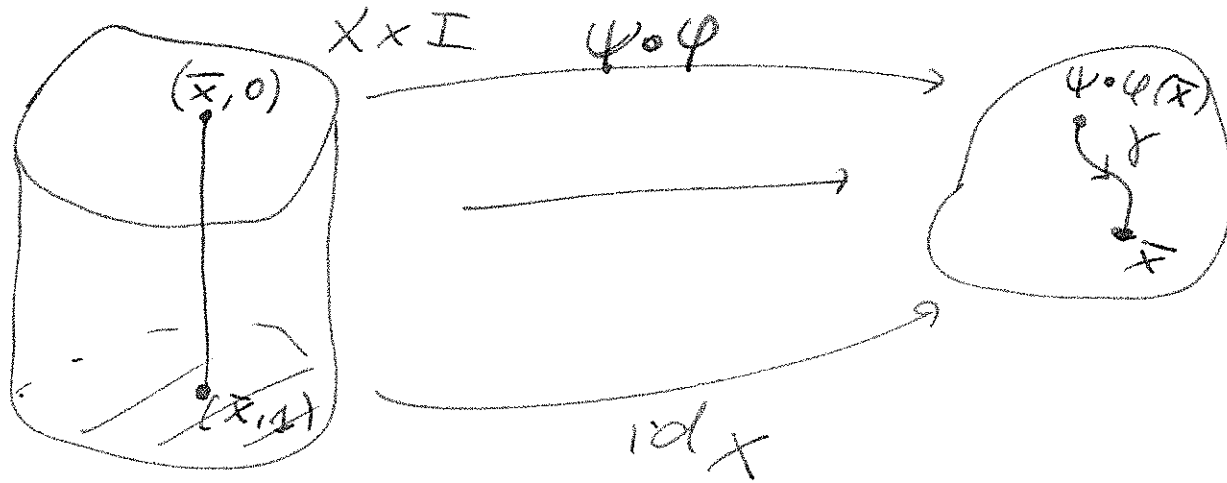
omotopia tra id_X e $\psi \circ \varphi$

allora $\varphi(X)$ è cpa in Y

$\Rightarrow \varphi(x) \subseteq \text{comp. connessa per archi di } Y$ ②

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} X$$

$\xrightarrow{\psi \circ \varphi}$



$$Y \xrightarrow{\psi} \bigotimes \xrightarrow{\varphi} Y$$

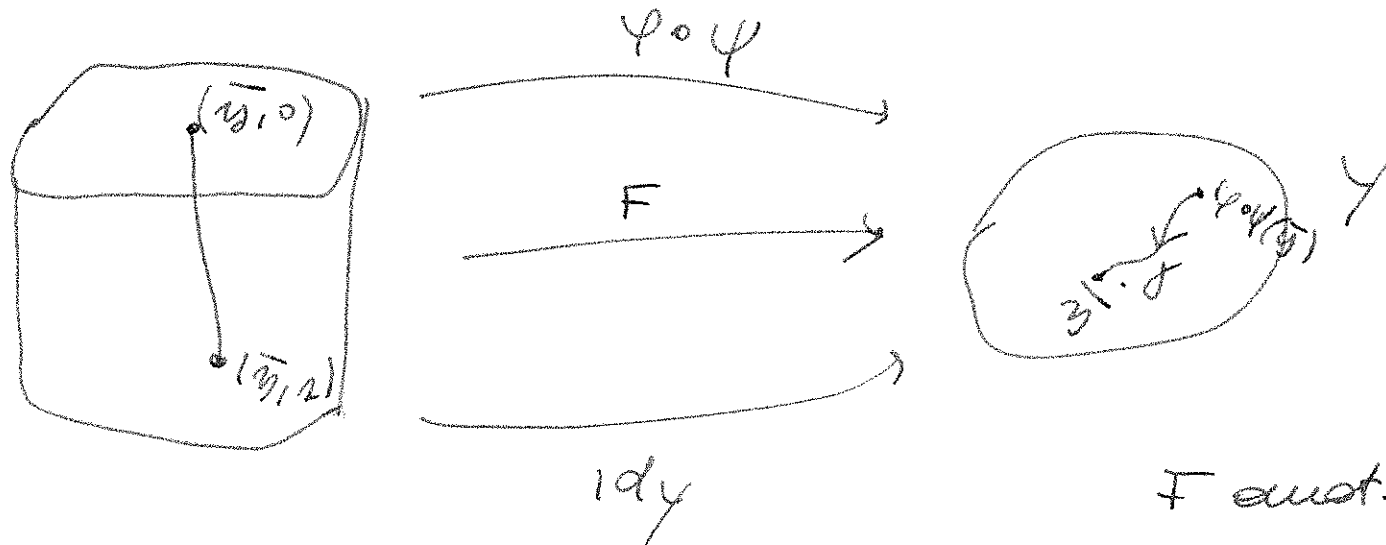
$C \rightsquigarrow$

$D \longrightarrow$

Quindi sia C comp. cpa di Y t.c. $\varphi(X) \subseteq C$ (3)

$$Y \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} Y$$

$$\varphi \circ \psi(Y) \subseteq C$$



$$\forall \bar{y} \in Y$$

F aut. tra
 $\varphi \circ \psi$ e id_Y

$F(\bar{y}, t) = \gamma(t)$ è cammino tra

$$\varphi(\psi(\bar{y})) \in C \quad \text{e} \quad \bar{y}$$

$\Rightarrow \bar{y} \in C$ per def. di comp. connesa per archi.

$$\Rightarrow \boxed{C = Y}$$

(4)

Stesso ragionamento ci dice in generale che
se $\varphi: X \rightarrow Y$ è equivalenza omotopica
allora φ dà corrisp. biunivoca tra
comp. cpa di X e comp. cpa di Y .

$$\underline{ES} \quad D^2 \xrightarrow[\varphi]{} D^2$$

$$(x, y) \mapsto (0, 0)$$

$$D^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\cap \mathbb{R}^2$$

è una equivalenza omotopica.

Verifichilo.

Osservare che non è iniettiva né suriettiva

19 del foglio 6

$$\forall x \in S^1$$

5

Dimostrare che se $\pi_1(S^1, x)$ fosse banale

allora $\forall X$ spazio topologico, $\forall x_0 \in X$

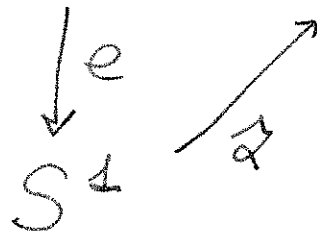
$$\pi_1(X, x_0) \cong \{[\varepsilon_{x_0}]\}$$

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega_{x_0}}{~}$$

ψ

$[\alpha]$

$\alpha: I \longrightarrow X$ laccio con pt base x_0



$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$$

$\leadsto \exists \tilde{\alpha}: S^1 \longrightarrow X$ continua indotta da α
e $\hat{\alpha} = \alpha$

$$\text{Se } \pi_1(S^1, (1,0)) = \{[\varepsilon_1]\}$$

⑥

I come
numero
complesso

$$\forall \beta: I \rightarrow S^1$$

significherebbe che $\exists$ omotopia

$$F: I \times I \rightarrow S^1$$

$$\text{t.c. } F(s, 0) = 1$$

$$F(s, 1) = \beta(s)$$

in particolare questo sarebbe vero per $\beta = e$

Quindi $\hat{\alpha} \circ F$ sarebbe

un'omotopia (rel. a $\{0, 1\}$) tra $\alpha = \hat{\alpha} \circ e$

$$\text{e } \hat{\alpha} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_{x_0}$$