15 novembre 2017 1

ESERCIZI

1) $g, f : X \to Y$ appl continue tra sp. topologici $Y$ T2

e $\exists\, E \subseteq X$ denso tc

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

allora $g(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ cioè $g \equiv f$

Sappiamo: $\{x \in X \quad g(x) = f(x)\}$ è <u>chiuso</u> in $X$

$C =$ $\left( (f,g)^{-1}(\Delta) \quad \Delta \subseteq Y \times Y \text{ chiusa perché } Y\ T2 \right)$

$E \subseteq C$ $\qquad$ $E$ denso: $\overline{E} = X$

$\overline{E} \subseteq C$ perché $C$ è chiuso $\Rightarrow X \subseteq C \Rightarrow X = C$

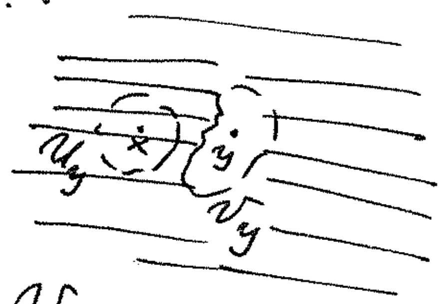
2) caratterizzazione di T2:

$$\underbrace{X \text{ T2} \iff \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{Y}(x)} \overline{\mathcal{U}} = \{x\}}$$

$$\mathcal{Y}(x) := \{\, \mathcal{N} \mid \mathcal{N} \text{ intorno di } x \,\}$$

$$(\exists\, \mathcal{U} \text{ aperto in } X \text{ tc } x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{N})$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Fisso $x \in X$ $\quad \forall y \neq x \;\; \exists \overset{\text{aperti}}{\underset{\ni x}{\mathcal{U}_y},\ \underset{\ni y}{\mathcal{V}_y}}$ e $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$




$\mathcal{U}_y \in \mathcal{Y}(x)$

$X \setminus \mathcal{V}_y \in \mathcal{Y}(x)$ perché $\mathcal{U}_y \subseteq X \setminus \mathcal{V}_y$

è un intorno chiuso

$$x \in \bigcap_{\mathcal{N}\in\mathcal{Y}(x)} \overline{\mathcal{N}} \subseteq \bigcap_{y\neq x} (X \setminus \mathcal{V}_y) = \{x\} \quad \Rightarrow \text{ok}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ prendo $x$ e $y$ distinti

supponiamo PA che $\nexists$ intorni aperti disgiunti

$\forall\, \mathcal{U}$ intorno di $x$ $\quad X \setminus \mathcal{U}$ non è un intorno di $y$.

$\Downarrow$

$\overline{\mathcal{U}} \ni y$

[infatti se $y \notin \overline{\mathcal{U}}$

$y \in X \setminus \overline{\mathcal{U}}$ intorno aperto di $y$

disgiunto da $\mathcal{U}$]



$$\Longrightarrow \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{I}(x)} \overline{\mathcal{U}} \ni \{x, y\} \qquad \boxed{\text{OK}}$$

3) $T_0 \iff$ punti distinti hanno chiusure distinte

$\Updownarrow$

$\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\quad \exists\, \mathcal{U}$ aperto tc $x \in \mathcal{U}$ e $y \notin \mathcal{U}$
vel
$\exists\, \mathcal{V}$ aperto tc $y \in \mathcal{V}$ e $x \notin \mathcal{V}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano per assurdo $x, y$, $x \neq y$ e $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

sia $\mathcal{U}$ aperto tc $x \in \mathcal{U}$ se $y \notin \mathcal{U}$

$y \in X \setminus \mathcal{U}$ chiuso

$$\Rightarrow \overline{\{y\}} \subseteq X \setminus \mathcal{U}$$
$$\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \ni x$$

Assurdo $\qquad$ stesso per $\mathcal{V}$ $\qquad \boxtimes$

**OSS**

$$y \in \overline{\{x\}}$$

$$\overline{\{x\}} = X \setminus (X \setminus \{x\})^{\circ}$$

$$y \in \overline{\{x\}} \iff y \notin \underbrace{(X \setminus \{x\})^{\circ}}_{\text{è più grosso aperto di } X \text{ che non contiene } x}$$

$$= \bigcup_{\substack{U \text{ aperto} \\ x \notin U}} U$$

$$\iff \forall\, U \text{ aperto tc } U \not\ni x \quad y \notin U$$

$$\iff \forall\, W \text{ aperto tc } W \ni y \implies W \ni x$$

4) Ogni spazio metrizzabile è normale

$$\text{normale} = T1 + T4$$

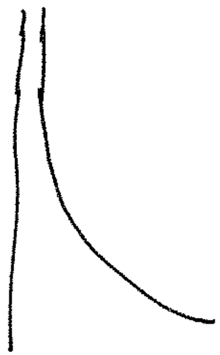
<u>OSS</u> metrizzabile $\Rightarrow T1$ ok

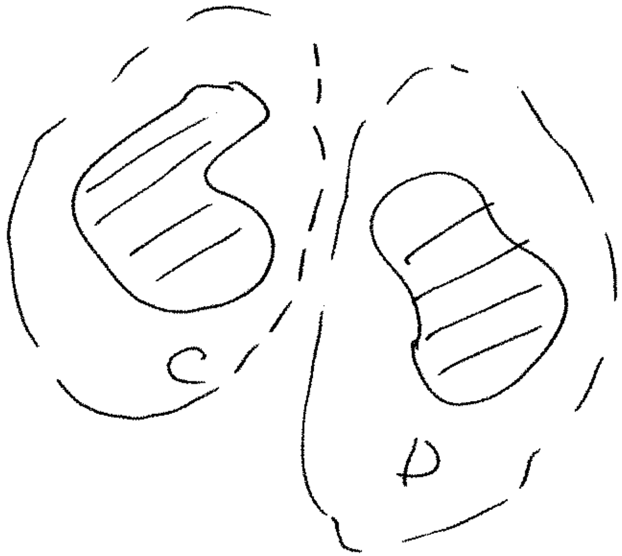
$$\Downarrow \quad T2 \quad \Nearrow$$

Sia $d$ metrica su $X$ che induce la topologia.

$C, D \subseteq X$ chiusi disgiunti

cerco aperti disgiunti che li contengano






(seguiamo Manetti sez. 7.5)

$$\beta = c - \frac{c-d}{a-b} a$$

$f$ è continua e invertibile e è biiettiva $\Big\}$ $f$ è omeo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e anche $f|_{(a,b)} : (a,b) \to (c,d)$ è omeomorfismo

---

$[0,1) \not\approx (0,1)$

usiamo la connessione

$$\boxed{\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m \quad n \neq m}$$

non riusciamo qui!

In questo corso non vediamo dim. (serve omologie)

ES $(\mathbb{R}, \tau_+)$ $\qquad \tau_+ = \{(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}\}$

mi chiedo se $(\mathbb{R}, \tau_+) \simeq (\mathbb{R}, \tau_e)$ ?

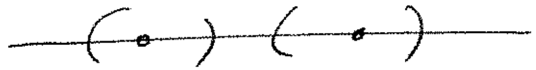
OSS $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_+) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

è biettiva e aperta
non continua

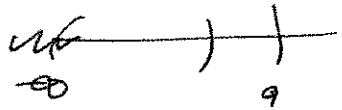
non dice che non sono omeomorfi!

ma $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è di Hausdorff ($T2$)

$(\mathbb{R}, \tau_+)$ no



ADDIRITTURA $\forall\, \underset{\neq \emptyset}{U}, \underset{\neq \emptyset}{V} \in \tau_+ \qquad U \cap V = U \neq \emptyset$ oppure $= V \neq \emptyset$




$\forall\, x, y \quad x \neq y \quad \nexists\, U, V$ che li separano

so che: $(X, \tau_X) \simeq (Y, \tau_Y)$
$X$ è $T2$ sse $Y$ è $T2$

$\rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e) \not\simeq (\mathbb{R}, \tau_+)$

5) Il prodotto $X \times Y$, se $X$ e $Y$ sono $T_i$, è $T_i$

$i = 0, 1, 2, 3$

Problema: trovare controesempi $i = 4$

$i = 1$ $\quad X$ e $Y$ $T1$

$X \times Y$ è $T1$: $\forall (x, y) \neq (x', y')$

supp $x \neq x'$ $\quad$ siccome $X$ è $T1$ $\exists\, U, U' \subseteq X$ aperti

tc $x \in U$, $x' \in U'$

e $U \cap U' = \emptyset$

prendo $\underset{(x,y)}{\underset{\Psi}{U \times Y}}$ e $\underset{(x',y')}{\underset{\Psi}{U' \times Y}} \in \mathcal{B}_{X \times Y}$

$\boxed{i=0}$ il ragionamento sopra funziona:

stessi passaggi $\quad x \neq x'$ $\quad \exists\, U$ tc $x \in U$ e $x' \notin U$

o $\exists\, U'$ $x' \in U'$ e $x \notin U$

Se $\exists\, U$ come sopra $\quad U \times Y \ni (x,y)$, $\quad U \times Y \not\ni (x',y')$

se $\exists\, U'$ come sopra $\quad U' \times Y \ni (x',y')$, $\quad U' \times Y \not\ni (x,y)$

quindi anche il prodotto di $T_0$ è $T_0$ —

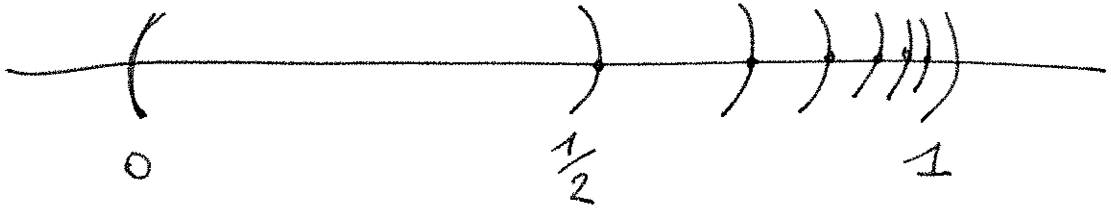
6) Esempio di spazio $T_4$ non $T_0$ neanche $T_3$
(quindi non è $T_1$ né $T_2$)

$X = (0,1)$

Definisco questa topologia su $X$:

$$U_n = (0, 1 - 1/n) \qquad n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$$

$\tau$ topologia generata dagli $U_n$



$\{U_n, n \geq 2\} \cup \{\emptyset, (0,1)\}$ è la nostra topologia $\tau$

se prendo $n_1 \dots n_k$ finiti $\in \mathbb{N}_{\geq 2}$

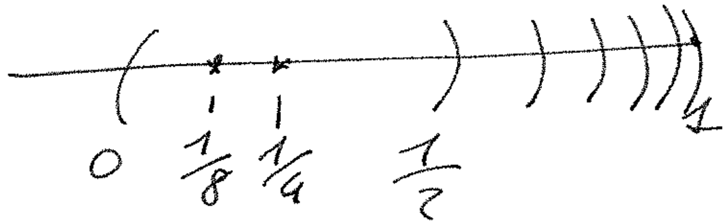
$$\bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} = \left(0, 1 - \frac{1}{\max\{n_i\}}\right) = U_{\max\{n_i\}}$$

se ho infiniti $n_i$ allora $n_i \longrightarrow +\infty$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{n_i} = (0, 1)$$

inoltre $U_n \cap U_m = \left(0, 1 - \frac{1}{\min\{n,m\}}\right)$ ok

oss $\tau \subsetneq \tau_e$




$(X, \tau)$ non è T0

prendo $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{4}$ ogni $U \in \tau$ che contiene $\frac{1}{8}$ contiene $\frac{1}{4}$

e viceversa

OK

vediamo che non è T3 :

ogni aperto che contiene $[1/2, 1)$ contiene $1/8$ :

i.e. chiuso $\;\;\; [1/2,1) = X \setminus \underbrace{(0, 1/2)}_{\in \tau}$

infatti ogni aperto che contiene $x$ contiene $(0, x]$ per la def. di $\tau$

oss i chiusi sono : $\{ [1 - 1/n, 1) , n \geq 2 \} \cup \{ X, \emptyset \}$

$X$ è banalmente T4 perché non abbiamo chiusi disgiunti !