

14 novembre ①

ES X, Y sp top.
 Z, W

$$f: X \rightarrow Y$$

$$g: Z \rightarrow W$$

$$f \times g: X \times Z \rightarrow Y \times W$$

Sappiamo: $\cdot f, g$ continue $\Rightarrow f \times g$ continua
 $\cdot f, g$ aperte $\Rightarrow f \times g$ lo è

$$U \subseteq X \quad V \subseteq Z$$

$ap \quad \quad \quad ap$

$$f \times g (U \times V) = \underbrace{f(U)}_{aperto} \times \underbrace{g(V)}_{aperto}$$

aperto

$\cdot f, g$ chiuse $\Rightarrow f \times g$ chiusa?

$$X = Y = Z = W = \mathbb{R}$$

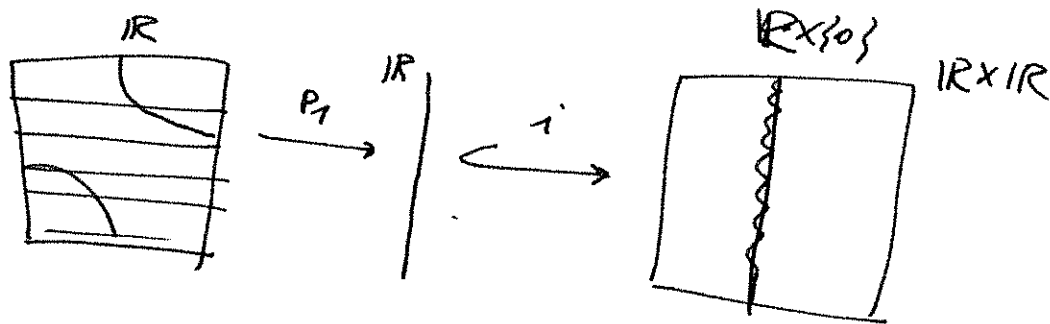
$$id_{\mathbb{R}} \times c_0$$

$$c_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0$$

$$f \times g (x, y) = (x, 0)$$

(2)



$$p_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{non e' chiusa}$$

$$\left. \begin{array}{l} i: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x \mapsto (x, 0) \end{array} \right\} \text{immersione chiusa}$$

$$f \times g = i \circ p_1$$

$\rightarrow p_1$ non chiusa: $C = \{xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$p_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ non e' chiuso!}$$

preudo

$$f \times g(C) = \{(x, 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

non

non e' chiuso $\mathbb{R}^2$



Ma $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ e' chiusa

$g = c_0$ e' chiusa

(3)

In generale una appl. costante $c(x) = \bar{y} \quad \forall x \in X$
 è chiusa sse $\bar{y}$ è chiuso in Y
 $X \rightarrow Y$

l'unica cosa da osservare è che $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$!

[ES] X spazio topologico

$$X \xrightarrow{\psi} X \times X \quad \text{im} \psi = \Delta \text{ diagonale}$$

$$\underset{\psi}{x} \longmapsto \underset{\psi}{(x, x)}$$

vedere che ψ è immersione:

- ψ è iniezione? OK

$$\begin{array}{ccc} \psi(x) = \psi(y) & & \\ \parallel & & \parallel \\ (x, x) & & (y, y) \\ \parallel & & \\ x = y & & \end{array}$$

come mai dire immersione:

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{Z} \quad \text{sp top} \quad f \text{ continua}$$

- f iniezione: identifico $\mathcal{Y}$ con $f(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}$
- $f: \mathcal{Y} \rightarrow f(\mathcal{Y})$ è omeomorfismo sottoinsieme

- ψ è continua: ψ è cont. sse le sue comp. sono continue.
ma $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ $\psi_i = \text{id}_X$ ok

- $\psi: X \rightarrow \Delta$ è aperta?

U aperto in X

$\psi(U)$ è aperto in Δ ?

se? $\exists W$ aperto in $X \times X$

tale che

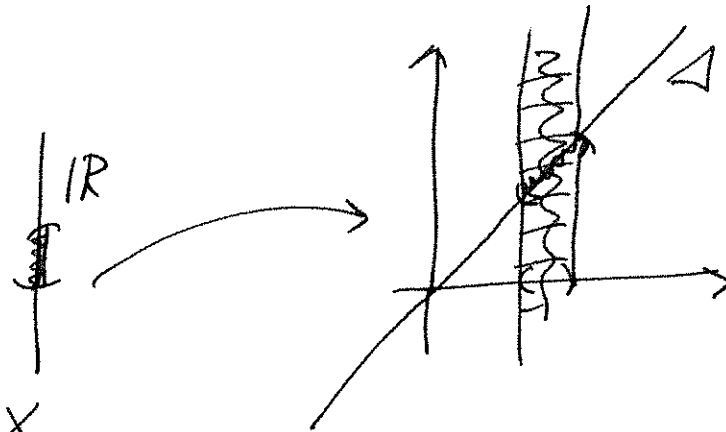
$$W \cap \Delta = \psi(U)?$$

$$\parallel$$

$$\{(x, x) \mid x \in U\}$$

prendo $W = U \times X \in \tau_{X \times X}$ (sta nelle basi canoniche!)

$$\begin{aligned} W \cap \Delta &= \{(x, x) \mid (x, x) \in W\} = \\ &= \{(x, x) \mid x \in U\} = \psi(U) \quad \text{ok} \end{aligned}$$



(5)

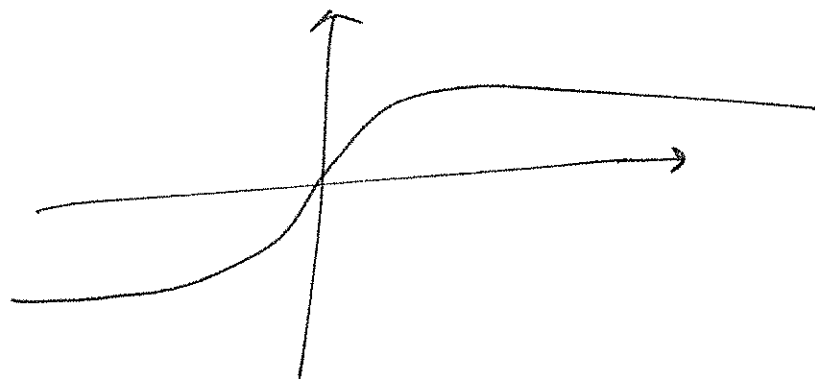
$\Rightarrow \psi$ è immersione NB ψ in generale non è
 aperta $\psi: X \rightarrow X \times X$
 Basta prendere $X = \mathbb{R}$
 ψ è chiusa se X è TZ (visto)

$[E S] \nmid (a, b)$ con $a < b$

$(a, b) \sim \mathbb{R}$ ————— $\downarrow$ cioè

$(a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad ((a, b), \tau|_{(a, b)}) \sim (\mathbb{R}, \tau)$

arctan: $\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è omeomorfismo



se vedo che $\forall a, b, a < b \quad \forall c, d, c < d$

⑥

$(a, b) \sim (c, d)$ no finito

(per la transitività dell'equivalenza)

cerco

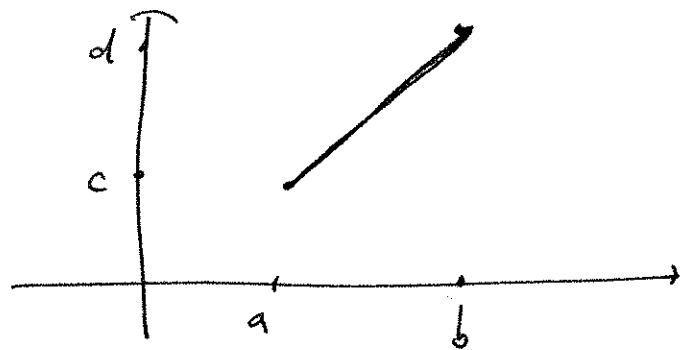
funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{t.c. } f((a, b)) = (c, d)$$

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

$$\text{tale che } f(a) = c$$

$$f(b) = d$$



$$\begin{cases} \alpha a + \beta = c \\ \alpha b + \beta = d \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= c - \alpha a \\ &= d - \alpha b \end{aligned}$$

$$\alpha a - c = \alpha b - d$$

$$\alpha(a - b) = c - d$$

$$\alpha = \frac{c - d}{a - b}$$

attenzione $a - b \neq 0$!

7

$$\beta = c - \frac{c-d}{a-b} a$$

f è continua e invertibile
e è biettiva } f è omeo
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

e anche $f|_{(a,b)} : (a,b) \rightarrow (c,d)$ è omeomorfismo

$[0,1) \not\sim (0,1)$

↔

usando
la connessione

$\mathbb{R}^n \not\sim \mathbb{R}^m$
 $n \neq m$

non
risolviamo
qui?

In questo
corso non
vediamo dim.
(serve analogie)

Es $(\mathbb{R}, \tau_+)$ $\tau_+ = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\}$

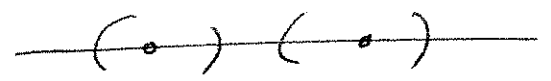
mi chiedo se $(\mathbb{R}, \tau_+) \sim (\mathbb{R}, \tau_e)$?

Oss $\text{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_+) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$
 è biettiva e aperta
non continua

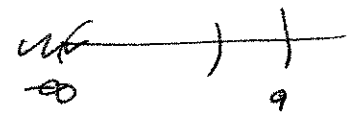
non dice
 che non
 sono omeomorfi !

ma $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è di Hausdorff (τ_2)

$(\mathbb{R}, \tau_+)$ no



ADDITTURA $\forall U, V \in \tau_+$ $U \cap V = U \neq \emptyset$
 oppure
 $= \emptyset$



$\forall x, y \quad x \neq y \quad \nexists U, V$ che li separano

so che : $(X, \tau_X) \not\sim (Y, \tau_Y)$
 $X \in \tau_2$ sse $Y \in \tau_2$
 $\rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e) \not\sim (\mathbb{R}, \tau_+)$

Domanda: $(\mathbb{R}, \tau_s) \stackrel{??}{\sim} (\mathbb{R}, \tau_e)$
 $\epsilon \tau_2$ $\epsilon \tau_2$

⑨