

ESERCITAZIONI

13 dicembre 2017

①

Visto X localmente connesso se

$\forall x \in X \quad \forall \mathcal{N}$ intorno di $x \quad \exists \mathcal{V}$ intorno di x
tale che $x \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{V}$ è connesso

equivalentemente:

$\text{ogni } x \in X$ ha una base locale (ovvero un sistema fondamentale di intorni) connessa

Domanda: è equivalente la proprietà che

$\forall x \in X \quad \forall \mathcal{N}$ intorno di $x \quad \exists \mathcal{V}$ intorno aperto di x ?
tale che $x \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{V}$ connesso

Fatto: X localmente connesso $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ aperto in X

(2)

le componenti connesse di U sono aperte in X

dim: $\Rightarrow$ sia $U \subseteq X$ aperto. Sia A componente connessa di U
sia $x \in A$. U è intorno di x quindi per ipotesi $\exists V$ intorno
connesso di x

tale che $x \in V \subseteq U$. V connesso e $V \cap A \ni x \Rightarrow V \subseteq A$
allora A è aperto.

$\Leftarrow$ sia $x \in X$ sia $\mathcal{N}$ intorno di x . $\mathcal{N} \cap X$

sia U aperto tale che $x \in U \subseteq \mathcal{N}$

sia A componente connessa di U che contiene x

$x \in A \subseteq U \subseteq \mathcal{N}$ A è intorno connesso di x

— vediamo che la risposta alla domanda è $\textcircled{SD}$:

sia dunque X localmente connesso. Sia $\mathcal{U}$ intorno di x

esista $x \in X$ un suo punto
sia $U \subseteq \mathcal{U}$ aperto tale che $x \in U$. Se prendo $A =$ componente connessa
di U che contiene x , A è un aperto connesso tale che $x \in A \subseteq \mathcal{U}$ $\textcircled{OK}$

→ In $\mathbb{R}^n$ ogni aperto è localmente connesso per archi:

③

vediamo: in $\mathbb{R}^n$

aperto connesso $\Leftrightarrow$ aperto connesso per archi

$\Leftarrow$ ok

$\Rightarrow$ Sia U aperto connesso voglio vedere che è connesso per archi.

$$x \in U \quad A = \{ y \in U \mid \exists \text{ un cammino tra } x \text{ e } y \text{ in } U \}$$

è la componente connessa per archi che contiene x di U .

Vorremmo vedere che $A = U$

Fatto: A è aperta:

sia infatti $y \in A$



$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(y) \subseteq U$ Allora ogni punto $z \in \underline{B_\varepsilon(y)}$ ④

è contenuto in un arco α x : prendo

$\beta: I \rightarrow U$ arco tra x e y

$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow U$ arco tra y e z (segmento)

$\beta * \gamma: I \rightarrow U$ arco tra x e z

—

Proviamo che A è anche chiuso:

~~sia~~ $y \in U \setminus A$

$\nexists$ cammino tra y e x

se considero $z \in B_\varepsilon(y)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{con } \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B_\varepsilon(y) \subseteq U \\ \text{se } z \in A \text{ allora} \end{array} \right.$

c'è un cammino tra z e x in $U \Rightarrow$ c'è un cammino tra y e x

$\Rightarrow U \setminus A$ è aperto: ~~ovvero~~

(5)

$$\forall z \in U \setminus A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon(z) \subseteq U \Rightarrow B_\varepsilon(z) \subseteq U \setminus A$$

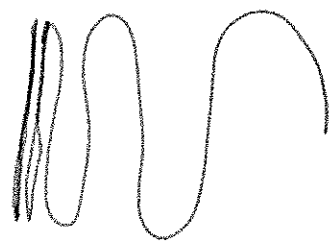
$\Rightarrow A$ è aperto e chiuso e $x \in A \quad A \subseteq U$ conneso

$\Rightarrow \underline{A = U}$ A è la componente cpa di X
che contiene x

$\Rightarrow A = U$ è conneso per archi

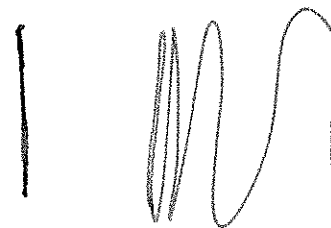


oss: Il seno del topologo non è aperto in $\mathbb{R}^2$



1 comp. connesa

2 comp. connesse per archi



non sono
né entrambe
aperte né
entrambe chiuse!

l'esercizio di prima ci dice che per $M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
vale che le sue comp. cpa sono sia aperte che chiuse. ⑥

ES Quando le componenti connesse di uno spazio
topologico sono aperte? (Ricordiamo ci che sono
sempre chiuse)

X spazio top. le comp. connesse di X sono aperte
se ogni punto di X possiede un intorno connesso. ⑦

Attenzione è meno della locale connettività!! ⑧

se X connesso, basta osservare che X è intorno di ogni
suo punto!

Viceversa, se vale (*) Sia $C \subseteq X$ componente connessa.
sia $x \in C$ so che $\exists U$ intorno di x connesso.

$\Rightarrow C \cup N$ è conneso e contiene x

⑦

Per def. di comp. connesa $C \cup N = C$

$\Rightarrow N \subseteq C \Rightarrow \forall x \in C \exists V \text{ intorno di } x \text{ t.c.}$
 $\underbrace{W \subseteq C}$
cioè C è aperta OK

ES X spazio topologico conneso + loc. conneso per archi:

$\Rightarrow X$ è conneso per archi

def localmente conneso per archi:

fatto a
esecitazione

ES, u.22. manetti

8

def X insieme $A \subseteq P(X)$

si dice che A ha la proprietà dell'intersezione finita
se $\forall$ sottofamiglia finita non vuota di A
$$\mathcal{F} \subseteq A$$

vale che

$$\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$$

Dimostrare che X è compatto se e solo se
ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell' $\cap$ finita
ha intersezione non vuota:

$$X \text{ compatto} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \forall \mathcal{C} \text{ famiglie di chiusi } \text{t.c.} \\ \forall \text{ sottofamiglia finita } \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \quad \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'} C' \neq \emptyset \end{array} \right] \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$$

(♥)

X compatto $(\Rightarrow)$ $\forall$ $\mathcal{A}$ famiglia di aperti t.c.

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$$

$\exists$ sottofamiglie finite t.c. $\bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A' = X$
 $A' \subseteq A$

$(\Leftarrow)$ $\forall$ $\mathcal{C}$ famiglia di chiusi t.c.

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$$

$\exists$ sottofamiglie finite $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ t.c. $\bigcap_{C' \in \mathcal{C}'} C' = \emptyset$

pensando ai
complementari

se vale (B) sia $\mathcal{C}$ fam. di chiusi t.c. $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$

Allora per (C) $\exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottofam. finita
con $\bigcap_{C' \in \mathcal{C}'} C' = \emptyset$ (Q.E.D.)

se vale la compattezza:

se $\mathcal{C}$ famiglie di chi'uni' +c

$\forall$ sottofam. finita $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$

$$\bigcap_{C' \in \mathcal{C}'} C' \neq \emptyset$$

se forse $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$ allora per compattezza avrei' che

$$\exists \text{ sottofam. finita } \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \quad +c \quad \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'} C' \neq \emptyset = \emptyset \quad \square$$

ESERCIZIO: Discutere la compattezza di:

$[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ con $\tau_e / \mathcal{D} / \mathcal{C} / \tau_s / *$

in τ_e $[0, 1]$ è compatto visto a lezione.

con $\mathcal{D}$

In generale: per qualunque X insieme

vale che $(X, \mathcal{O})$ è compatto sse $|X| < +\infty$

se X è finito $P(X) \Rightarrow$ qualunque ricoprimento di X
 (a meno di ripetizioni)
 è finito !

$\Rightarrow (X, \tau)$ con qualunque topologie τ è
 compatto.

se X è infinito con topologie discreto $\mathcal{O}$

$\mathcal{A} = \{ \{x\}, x \in X \}$ è un ricoprimento aperto

$$|\mathcal{A}| = |X| = +\infty$$

e A non permette sotto ricoprimenti propri:

(12)

$$\text{se } A' \subsetneq A \quad \exists \bar{x} \in X \text{ t.c.} \\ \{\bar{x}\} \not\subset A'$$

$$\Rightarrow \bar{x} \notin \bigcup_{A \in A'} A$$
