

ESERCIZI

10 gennaio 2018

①

ES) Ogni stellato in $\mathbb{R}^m$ è contraibile.

$S \subseteq \mathbb{R}^m$ stellato: $\exists \bar{x} \in S$ t.c.

$$\forall x \in S \quad \forall t \in I \quad \underline{t\bar{x} + (1-t)x} \in S \quad (*)$$

Verifichiamo che $\text{id}_S \approx c_{\bar{x}}$:

Costruiamo l'omotopia usando la proprietà

$$F: S \times I \longrightarrow S \quad F(x, t) = t\bar{x} + (1-t)x$$

F è continua e vale proprio che $F(x, 0) \stackrel{=x}{=} \text{id}_S(x) \quad \forall x \in S$
e $F(x, 1) = \bar{x} \quad \forall x \in S$

Attenzione: se non avessi la condizione (*)

F non andrebbe in S

F è comunque sempre ^{ben definita} ^{e continua} in $\mathbb{R}^n$.

(2)

ES In X spazio T_2 i retratti sono sempre chiusi:

A retratto di X : $\exists r: X \rightarrow A$ continua
tale che $r|_A = \text{id}_A$

SO:

- $X \text{ } T_2 \iff \Delta \subseteq X \times X$ è chiusa
- Se ho $f, g: Y \rightarrow X$ con $X \text{ } T_2$
continue
 $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\} = (f \times g)^{-1}(\Delta)$
è chiuso in Y

Proviamo: $\{x \in X \mid \exists c \text{ } r(x) = x\} = A$

r continua, id_X continua $A \text{ } T_2$ (piccolo sottospatto di $X \text{ } T_2$)

$\Rightarrow A$ è un chiuso in X .

ES verifichiamo che $[0, 1]$ è retracts forte di def. di $\mathbb{R}$.

$\exists$ Retrazione

$$r: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

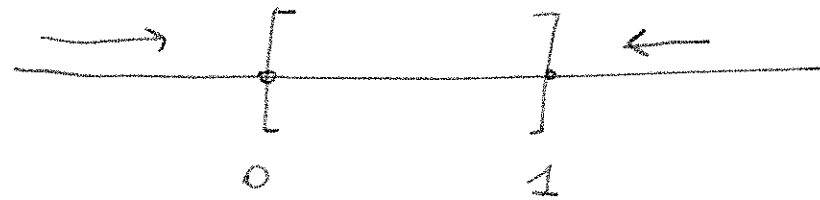
$\text{t.c. } \exists$

$$R: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

$$\text{t.c. } R(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$R(x, 1) = r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{R(s, t) = s \quad \forall s \in [0, 1]}$$

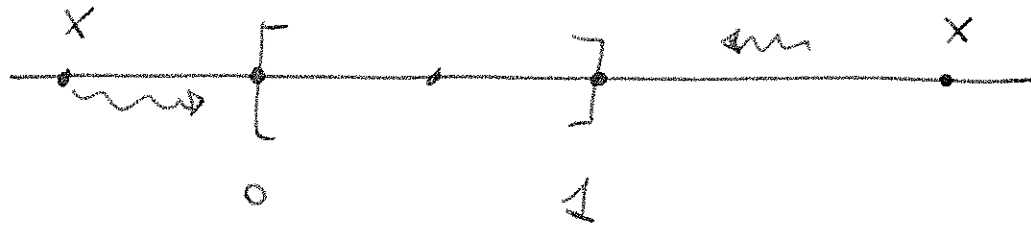


$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è appl. continua e

$$r|_{[0, 1]} = \text{id}_{[0, 1]}$$

4



$$R(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ (1-t)x + t \cdot 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ (1-t)x + t \cdot 1 & \text{se } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$R(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ (1-t)x & \text{se } x \leq 0 \\ (1-t)x + t & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

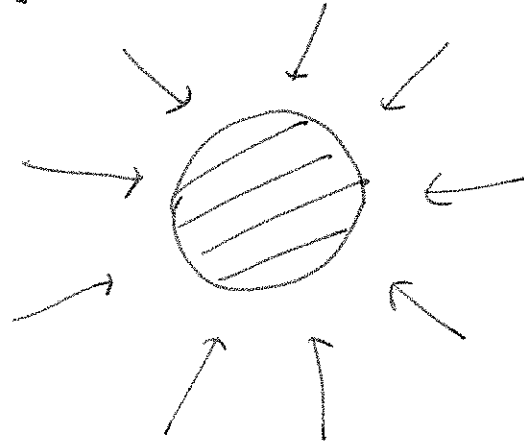
$$R: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

su $\{0\} \times I$

su $\{1\} \times I$

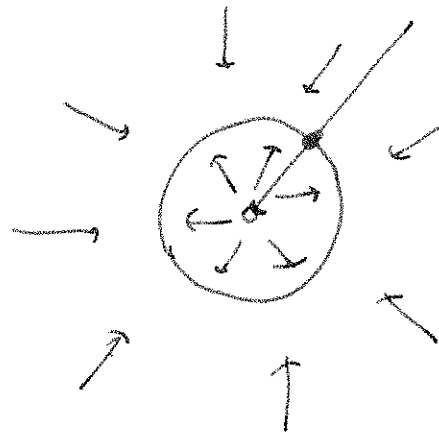
si incolla bene

ES verificare che D^2 è un retracts forte di deformazione di $\mathbb{R}^2$.



• verificare che S^1 è retracts forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

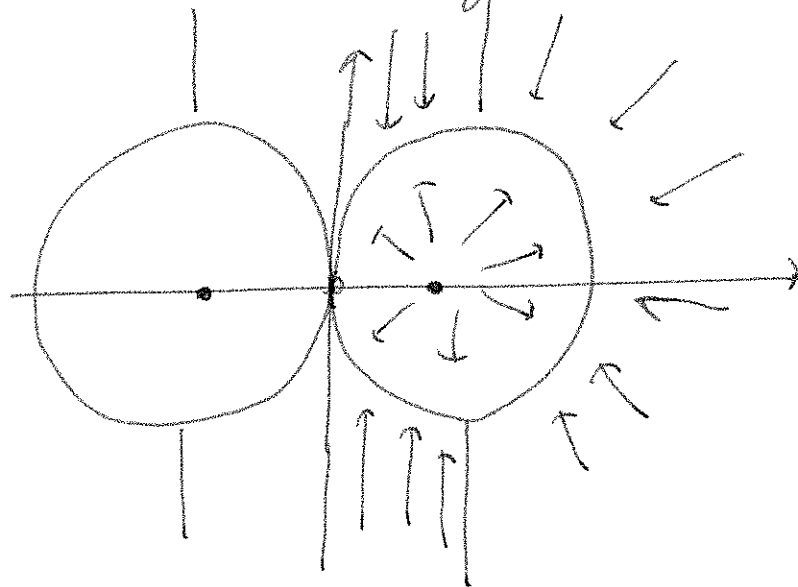
è fare raggio
per raggio
(0, +∞) in retracts su S^1



(6)

- verificate che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$

si reetra sulle figura a otto: $C_1 \cup C_2$



$C_1 =$ circonferenza di
raggio 1 centrata
in $(-1, 0)$

e C_2 circonferenza
di raggio 1 centrata
in $(1, 0)$

OSS Se A è retto di def. di X

$\Rightarrow A$ è quot. equivalente a X !

$r: X \rightarrow A$ $i: A \hookrightarrow X$ tali che $r \circ i = \text{id}_A$

$i \circ r \approx \text{id}_X$

in particolare sono equivalenze omotopiche!

(7)

ES Se X è uno spazio oomotopicamente equivalente ad Y cpa allora X è cpa

So che $\exists \varphi: X \rightarrow Y$ ed $\exists \psi: Y \rightarrow X$ continue

tali che $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_Y$ e $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_X$.

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} X$$

Osservo che siccome Y è cpa $\psi(Y)$ deve essere contenuto in una e una sola componente connessa di X per archi.

Sia C la componente connessa di X tale che $\psi(Y) \subseteq C$ per archi
sia $\bar{x} \notin C$ (per assurdo)

costruisco un arco tra $\bar{x}$ e un elemento di C usando l'omotopia

$$F: X \times I \rightarrow X \text{ tra } \psi \circ \varphi \text{ e } \text{id}_X$$

$\alpha(t) = F(\bar{x}, t)$ è arco che cerco. Quindi è assurdo.