

ESERCIZI

5 dicembre 2017 ^④

1) Essere connessi è una proprietà topologica.

RICHIAMO P
proprietà di uno spazio topologico

si dice topologico se P
se $X \sim Y$

Puole su X ($\Rightarrow$) Puole su Y

equivalentemente: P è costante sulle classi di equivalenza
per omeomorfismo.

visto in classe: $f: X \rightarrow Y$ appl. continua
suriettiva

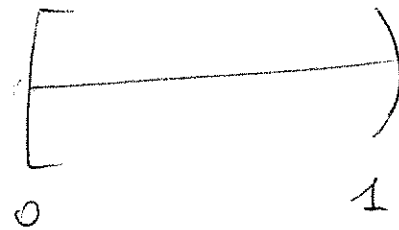
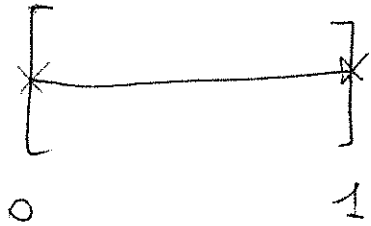
se X è connesso $\Rightarrow Y$ è connesso.

2) Dimostrare che $Y = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ e $Z = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ non sono omeomorfi. (3)

• Attenzione: sono entrambi connessi:

in effetti sono connessi per archi: tutti gli intervalli

sono connessi per archi



OSS $Y \setminus \{0, 1\}$ è $(0, 1)$ che è ancora connesso

D'altra parte $\forall p, q, p \neq q$, su Z

lo spazio $Z \setminus \{p, q\}$ è sempre
sconnesso:

infatti, almeno uno tra p e q appartiene a $(0, 1)$ ④

sia $p \in (0, 1)$

$$\mathbb{Z} \setminus \{p, q\} = \underbrace{(-\infty, p) \cap \mathbb{Z}} \cup \underbrace{(p, +\infty) \cap \mathbb{Z}}$$

aperti disgiunti in $\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}$
e non vuoti

$$(-\infty, p) \cap \mathbb{Z} \supseteq (0, p)$$

$$(p, +\infty) \cap \mathbb{Z} \supseteq (p, 1)$$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}$ è sconnesso.

Allora: $\underbrace{\mathbb{X} \setminus \{0, 1\}}_{\text{connesso}} \not\subset \underbrace{\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}}_{\text{disconnesso}}$

$\forall p, q \in \mathbb{Z}$
 $p \neq q$

se avessi omeomorfismo

(5)

$$\varphi: Y \longrightarrow Z$$

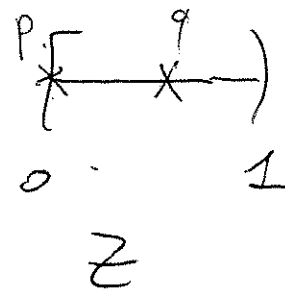
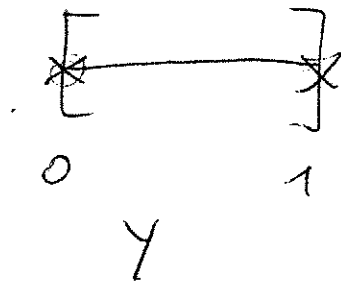
$$\varphi|_{Y \setminus \{0,1\}} : Y \setminus \{0,1\} \longrightarrow Z \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\}$$

omorfismo

sarebbe un omeomorfismo.

- infatti è
- biettivo per costruzione
 - continuo per restriz. di continuo
 - $\varphi|_{Z \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\}}$ è omeomorfismo

Assurdo



(6)

Altro modo: usando la compattezza

Y è compatto (chiuso e limitato)

e è no -

Es Classificare $A, B, C, D \dots$ come sottospazi
in dom di omeomorfismo di $\mathbb{R}^2$

Attenzione: per usare questo ragionamento:

X, Y sp top

se no che

$\exists p \in X \quad \text{t.c.} \quad X \setminus \{p\}$ è connesso

$\forall q \in Y \quad Y \setminus \{q\}$ è sconnesso

Allora $\Rightarrow X \not\sim Y$

Attenti

$\forall q \in \mathcal{Y}$

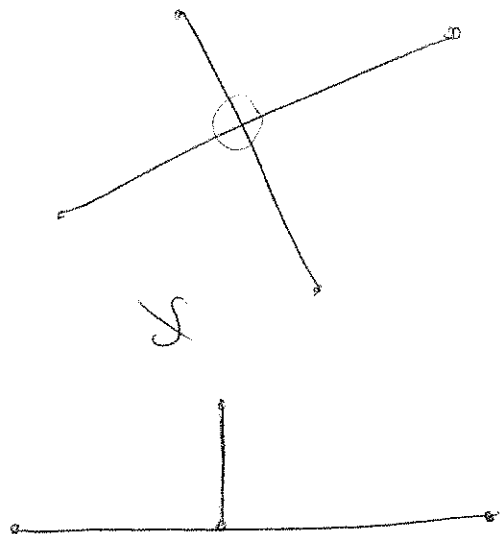
$\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, n\}$

e sconnesso

⑦

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} E & S \end{bmatrix}$



$\neq$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\neq$

→ questo lo
vediamo
bene con
le componenti
connesse!

3) (1) del foglio 4)

8

$\emptyset \neq X$ insieme

τ_1, τ_2 topologie

(X, τ_1)
connesso



(X, τ_2)
connesso

se $\tau_1 \subseteq \tau_2$
 τ_1 è meno fine
 di τ_2

(X, τ_i) connesso sse gli unici aperti e chiusi
 in τ_i sono $X, \emptyset$

se $\tau_1 \subseteq \tau_2$ aperti di τ_1 sono
 aperti in τ_2

$\hookrightarrow$

 quindi chiusi di τ_1 sono
 chiusi in τ_2

Quindi l'implicazione che vale è

$$(X, \tau_2) \text{ è connesso} \Rightarrow (X, \tau_1) \text{ lo è}$$

l'altra implicazione è in generale falsa:

contro
esempio: X insieme $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{D}$
 $|X| > 1$

$(X, \mathcal{C})$ è sempre connesso

$(X, \mathcal{D})$ è sempre sconnesso

Esercizio analogo per voi:

X insieme $\tau_1 \subseteq \tau_2$ topologie su X

$(X, \tau_1) \in \mathcal{T}_i \Leftrightarrow (X, \tau_2) \in \mathcal{T}_i \quad i=0, \dots, 4$??

4) ((9) del Foglio 4)

(10)

X è connesso $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{ogni applicazione} \\ \text{continua } X \rightarrow \mathbb{Z} \\ \text{è costante} \end{array} \right)$

Oss $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ con top indotto da $\mathcal{T}_e$
 $\mathcal{T}_e|_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}$ top discreto

$\boxed{\Rightarrow}$ se X è connesso e $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ è continua

voglio vedere che f è costante

$f(X)$ è un connesso in $\mathbb{Z}$

$f(X) \subseteq \mathbb{Z}$

$f(X)$ ha topologie discrete

$\Rightarrow f(x)$ è connesso se è il singletho (11)

$\Rightarrow f(x) = \{p\}$ per qualche $p \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ X sp. top. tale che ogni appl. da X in $\mathbb{Z}$ è costante.

voglio X connesso.

supponiamo che X sia sconnesso

troviamo una appl. continua $X \rightarrow \mathbb{Z}$ che non sia costante.

$$X = A \cup B$$

A, B aperti non vuoti

$$\text{e } A \cap B = \emptyset$$

Definisco $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$$