<u>ESERCIZI a.a. 2015-2016</u>

Lidia Stoppino

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore, Università dell'Insubria

1. Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso (risp. contraibile) è semplicemente connesso (risp. contraibile).

2. Dimostrare che $SL(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante uguale a 1) è un retratto forte di deformazione di $GL_+(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante strettamente positivo).

3. Quali di questi sottospazi di $\mathbb{R}$ sono retratti/retratti forti di deformazione di $\mathbb{R}$?
$$\{1\}, \{0, 1\}, [0, 1), [0, +\infty), [0, 1].$$

4. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2 + z^2 - 1 = 0\}.$$
Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{C \cup r\}, x)$, al variare di r tra le rette in $\mathbb{R}^3$ (con $x \notin \{C \cup r\}$). [Bisognerà distinguere un numero finito di casi a seconda delle possibili posizioni reciproche di r e C]

5. Sia $G = \langle S \mid R \rangle$ un gruppo presentato con generatori e relazioni; definiamo il gruppo
$$AG := \langle S \mid AR \rangle, AR = R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in S\}.$$
Dimostrare che AG è un gruppo abeliano (l'abelianizzazione di G) e che esiste un omomorfismo suriettivo $G \to AG$. Determinare inoltre il nucleo di tale omomorfismo.

6. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ è isomorfo $Z/2 \times Z/4$. G è l'abelianizzato di $G' = \langle a, b \mid a^4, b^2 \rangle$. Stabilire se G' è un gruppo finito.

7. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b | a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} \rangle$ non è il gruppo banale.

8. Dimostrare che l'unica varietà compatta connessa di dimensione 1 è S^1.

9. Dimostrare che ogni n-varietà topologica compatta e connessa è omeomorfa a un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ per qualche m (esercizio 11.2 (f) Kosniowski).

10. (Fatto in classe) Dimostrare che $T \sharp \mathbb{RP}^2 \sim \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$, dove $\sharp$ indica la somma connessa, T è il toro e $\mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo.

11. (Fatto in classe) Dimostrare che $K \sim \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$, dove K è la bottiglia di Klein.

12. (L'ipotesi T2 nella definizione di varietà topologiche è necessaria). Sia $X = [-1, 2]$. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di X.

$$\mathcal{A} = \{(a, b), -1 \leq a \leq b \leq 2\} \cup \{(a, 0) \cup (b, 2], -1 \leq a < 0, -1 \leq b < 2\}.$$

Dimostrare che

   (a) $\mathcal{A}$ è una base per la topologia di X, che induce una topologia $\mathcal{T}$ strettamente meno fine di quella euclidea su X.
   (b) $(X, \mathcal{T})$ è T0 ma non è T2.
   (c) Ogni punto di X ha in $\mathcal{T}$ un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}$.

13. Esibire una triangolazione di S^2, del toro T, del piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$ e della bottiglia di Klein K. Trovare una triangolazione della striscia di Möbius M (cioè un complesso simpliciale di dimensione 2 il cui spazio topologico associato sia omeomorfo a M).

14. (Fatto in classe) Sia C una corona circolare chiusa in $\mathbb{R}^2$. Siano C_1, C_2 le componenti connesse del bordo (che sono omeomorfe a S^1). Stabilire che superfici topologiche si ottengono identificando C_1 a C_2 nei due modi possibili.

15. Si considerino le figure piane in figura (1) con l'identificazione dei bordi indicate. Si stabilisca se sono superfici topologiche e si trovi il gruppo fondamentale.

16. Classificare le superfici topologiche ottenute identificando a due a due i lati del quadrato $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ in tutti i modi possibili. Stessa cosa con un poligono piano esagonale P_6 (è un po' lungo).

17. Una *curva semplice* in uno spazio topologico X è l'immagine di S^1 tramite una applicazione iniettiva. Sia T il toro.

   (a) Dimostrare che esistono due curve semplici chiuse C_1 e C_2 in T tali che il complementare
   $T \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ è connesso.
   (b) Esistono due curve semplici chiuse C_1 e C_2 in T *disgiunte* tali che il complementare $T \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ è connesso?
   (c) Dimostrare che non esistono tre curve semplici chuse in T tali che il complementare
   $T \setminus \{C_1 \cup C_2 \cup C_3\}$ è connesso.
   (d) Provare a generalizzare il ragionamento a superfici orientabili di genere g arbitrario.

18. Dimostrare che un'azione libera di un gruppo finito su uno spazio di Hausdorff è propriamente discontinua.

19. (Fatto in classe) Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ così definito: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ dove $X_1 = \{0\} \times [-1, 1]$, X_2 è il "seno del topologo":

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \sin(1/x)), x \in (0, 1/\pi]\},$$

e X_3 è un arco che connette i punti $(0, 0)$ e $(1/\pi, 0)$ (e che non interseca X_1 e X_2).

   (a) Dimostrare che X è connesso per archi e Il suo gruppo fondamentale è banale.

   (b) Si consideri la mappa su $Y := [0, 1/\pi] \times \{0\} \cup X_3$ data dalla contrazione al punto $(0, 0)$ di X_1, la proiezione di X_2 su $\{0\} \times (0, 1/\pi]$, e l'identità su X_3. Lo spazio Y è omeomorfo a S^1 (verificare), e dunque abbiamo una mappa indotta $f\colon X \longrightarrow S^1$. Dimostrare che la mappa f non si solleva a una mappa $X \to \mathbb{R}$ sul rivestimento universale di S^1.

20. Sia $f\colon S^1 \to T = S^1 \times S^1$ data da $f(z) = (z^2, 1)$. Trovare un rivestimento non banale di T tale che f ammetta (risp. non ammetta) un sollevamento.

21. Sia $n \geq 2$ un intero. Dimostrare che ogni applicazione continua $f\colon S^n \to S^1$ è omotopa ad un'applicazione costante.

22. Sia $p\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento. Sia $S \subset X$ un sottospazio. Sia $\widetilde{S} := p^{-1}(S)$. Mostrare che la restrizione $p_{|\widetilde{S}}\colon \widetilde{S} \to S$ è un rivestimento.

23. Mostrare che se $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ sono due rivestimenti, allora $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento.

24. Sia $p\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Trovare il gruppo fondamentale di $\widetilde{X}$ supponendo che il gruppo fondamentale di X sia isomorfo a $\mathbb{Z}$ e che la fibra abbia cardinalità finita.

25. Sia X l'incollamento in un punto di S^2 con S^1: $X = S^2 \vee S^1$.

   (a) Classificare tutti i rivestimenti connessi di X.

   (b) Si considerino le seguenti applicazioni continue $f, g\colon S^1 \longrightarrow X$:

      - f è ottenuta componendo la mappa

$$z \in S^1 \mapsto z^6 \in S^1 \qquad \text{(visti come sottospazi di } \mathbb{C})$$

      con l'inclusione $S^1 \subset X$.

- Consideriamo $\overline{\gamma}: S^1 \to S^2$ indotta dalla mappa $\gamma: [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ così definita:
$$\gamma(t) := (0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$
e g si ottiene componendo con l'inclusione $S^2 \subset X$.

Quali sono i rivestimenti connessi $\widetilde{X}$ di X tali che f ammetta un sollevamento $\widetilde{f}: S^1 \longrightarrow \widetilde{X}$? Stessa domanda per la mappa g.

26. (Fatto in classe) Dimostrare che uno spazio semplicemente connesso è semi-localmente semplicemente connesso.

27. Dimostrare che una varietà topologica connessa M è localmente connessa per archi e semi-localmente semplicemente connessa. Dimostrare inoltre che se $p: \widetilde{M} \to M$ è il rivestimento universale di M, $\widetilde{M}$ è ancora una varietà topologica.

28. Siano X e Y le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura (2).

    (a) Qualcuno di questi spazi è una superficie topologica?
    (b) Calcolarne i gruppi fondamentali.
    (c) Calcolarne i gruppi di omologia.
    (d) Per almeno uno degli spazi esibire esplicitamente una triangolazione (cioè un complesso simpliciale il cui spazio topologico soggiacente sia lo spazio dato), scriverne il complesso cellulare e calcolare l'omologia in questo modo.
    (e) se qualcuno tra X e Y è una superficie topologica, scriverne la forma canonica secondo la classificazione delle superfici.

29. Costruire dei rivestimenti del toro associati ai sottogruppi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(T)$ generati da:

    (a) $(0,0)$;
    (b) $(0,m)$ per $m \in \mathbb{N}$;
    (c) $(1,m)$ per $m \in \mathbb{N}$.

    Calcolarne l'ordine, e provare a disegnarli.

30. Esistono rivestimenti non noramli del toro?

31. Si considerino i due omeomorfismi (che tra l'altro sono isometrie) di $\mathbb{R}^2$ così definite: $\varphi(x,y) := (x + \frac{1}{2}, -y)$, $\psi(x,y) := (x, y+1)$. Si consideri il sottogruppo G degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato da φ e ψ.

    (a) Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{R}^2$.

(b) Dimostrare che il quoziente è omeomorfo alla bottiglia di Klein.

(c) Si consideri il sottogruppo G' di G generato da ψ^2 e φ (che ha indice due in G). Dimostrare che questo sottogruppo è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(d) Dimostrare che a G' è associato a un riverstimento doppio del toro sulla bottiglia di Klein.

32. Dato un gruppo G e un suo sottogruppo $H < G$, il normalizzante $N(H)$ di H è il sottogruppo
$$N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$
Dimostrare che $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G tale che H è normale in $N(H)$. (ovviamente H è normale se e solo se $N(H) = G$). Sia $p \colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso e cpa. Siano $x_0 \in X$, e $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, e sia $H = p_*(\pi_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ il sottogruppo associato.

    (a) Dimostrare che $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ è nel normalizzante di H se e solo se esiste una trasformazione del rivestimento $\varphi \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tale che $\varphi(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ dove $\widetilde{x}_1$ è il punto finale del sollevamento di α con punto iniziale $\widetilde{x}_0$.

    (b) Dimostrare che il gruppo delle trasformazioni del rivestimento $G(\widetilde{X})$ è isomorfo al quoziente $N(H)/H$ (sugg: definire un omomorgismo di gruppi $h \colon N(H) \to G(\widetilde{X})$ mandando $[\alpha]$ nella trasformazione del rivestimento definita nel punto precedente. Dimostrare che h è suriettivo e che il suo nucleo è H.

    (c) Dedurre in particolare che $G(\widetilde{X})$ è isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/H$ se X è un rivestimento normale.

33. Costruire il rivestimento universale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dall'unione della sfera e di un suo diametro.

34. Costruire il rivestimento universale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dall'unione della sfera e di una circonferenza che la intersechi in due punti.

35. (Fatto in classe ma ne potete pensare altri) Fare un esempio di un rivestimento (connesso) non normale della figura a otto.

36. Costruire il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2 \vee S^1$ e di $\mathbb{RP}^2$ unito un arco che unisce due punti distinti.