Corso di Istituzioni di Geometria Superiore

Docente: Lidia Stoppino

Università dell'Insubria

9 luglio 2014

Cercate sempre di dimostrare le vostre affermazioni

1. Sia X il il prodotto wedge (incollamento in un punto) di S^2 con S^1: $X = S^2 \vee S^1$.
   (a) Classificare tutti i rivestimenti connessi di X.
   (b) Si considerino le seguenti applicazioni continue $f, g\colon S^1 \longrightarrow X$:
      - f è ottenuta componendo la mappa
      $$z \in S^1 \mapsto z^6 \in S^1 \qquad \text{(visti come sottospazi di } \mathbb{C})$$
      con l'inclusione $S^1 \subset X$.
      - Consideriamo $\overline{\gamma}\colon S^1 \to S^2$ indotta dalla mappa $\gamma\colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ così definita:
      $$\gamma(t) := (0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$
      e g si ottiene componendo con l'inclusione $S^2 \subset X$.

   Quali sono i rivestimenti connessi $\widetilde{X}$ di X tali che f ammetta un sollevamento $\widetilde{f}\colon S^1 \longrightarrow \widetilde{X}$? Stessa domanda per la mappa g.

2. Siano X e Y le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura.
   (a) Qualcuno di questi spazi è una superficie topologica?
   (b) Calcolarne i gruppi fondamentali.
   (c) Calcolarne i gruppi di omologia.
   (d) Per almeno uno degli spazi esibire esplicitamente una triangolazione (cioè un complesso singolare il cui spazio topologico soggiacente sia lo spazio dato), scriverne il complesso cellulare e calcolare l'omologia in questo modo.
   (e) se qualcuno tra X e Y è una superficie topologica, scriverne la forma canonica secondo la classificazione delle superfici.

3. Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale e $v \in \mathcal{K}^{(0)}$ un suo vertice. Dimostrare che
$$H_n(\mathcal{K}, v) \cong \widetilde{H}_n(\mathcal{K}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
usando la sequenza esatta di omologia della coppia $(\mathcal{K}, v)$.