ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Advanced Geometry B
Università dell'Insubria, a.a. 2016/17
Consegna: lunedì 5 giugno

1. (Huleck pag. 95 Ex. (7)) Consideriamo la varietà proiettiva
$$X = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mid rank \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} < 1 \right\} \subset \mathbb{P}^4_k.$$
Sia $\pi \colon \mathbb{P}^4_k \dashrightarrow \mathbb{P}^2_k$ la proiezione dalla retta $\ell := V(x_0 = x_1 = x_2 = 0) \subset \mathbb{P}^4_k$, che in coordinate si rappresenta $\pi([x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [x_0 : x_1 : x_2]$.
   (a) Mostrare che $\pi_{|X}$ si estende a un morfismo $X \to \mathbb{P}^2_k$.
   (b) Determinare le fibre di questo morfismo.

2. (Huleck pag. 95 Ex. (11)) Siano X, Y varietà quasi-proiettive irriducibili. Dimostrare che un morfismo $f \colon X \to Y$ è un isomorfismo se e solo se è un omeomorfismo (ovviamente con la topologia di Zariski) e per ogni punto $P \in X$ l'omomorfismo di gruppi $f^* \colon \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ dato da $f^*(g) := g \circ f$ è un ismorfismo di gruppi.

3. (Hartshorne Chap. 1 Ex. 2.15) Consideriamo la superficie $\mathcal{Q} = V(x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbb{P}^3_k$.
   (a) Mostrare che $\mathcal{Q}$ è uguale all'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ in $\mathbb{P}^3_k$, per un'opportuna scelta delle coordinate.
   (b) Mostrare che $\mathcal{Q}$ contiene due famiglie di rette, entrambe parametrizzate da $\mathbb{P}^1_k$, $\{L_t\}, \{M_u\}$ $(t, u \in \mathbb{P}^1_k)$, tali che:
      - se $L_t \neq L_u$, $L_t \cap L_u = \emptyset$,
      - se $M_t \neq M_u$, $M_t \cap M_u = \emptyset$,
      - per ogni $t, u \in \mathbb{P}^1_k$ $L_t \cap M_u$ è un punto.

4. Consideriamo lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2_k$ in un punto. Calcolare la trasformata stretta delle seguenti curve in $\mathbb{A}^2_k$ e la sua intersezione con il divisore eccezionale E.
   (a) $\mathcal{D} = V(x^2 - y)$;
   (b) $\mathcal{C} = V(x^3 - y^2)$.

   Qualcuna di queste curve è isomorfa alla sua trasformata stretta?

5. Dati due interi $n \geq 1$, $d \geq 1$, consideriamo $N_d := \binom{n+d}{n} - 1$, e l'immersione di Veronese
$$v_d \colon \mathbb{P}^n_k \longrightarrow \mathbb{P}^{N_d}_k$$
$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [M_0 : \ldots : M_{N_d}],$$
dove gli M_i sono i monomi di grado d in $x_0, \ldots x_n$. Dimostrare che:
   (a) v_d è una immersione topologica chiusa;
   (b) l'immagine $V_d := v_d(\mathbb{P}^n_k) \subset \mathbb{P}^{n_d}$ è una varietà proiettiva irriducibile;
   (c) V_d non è contenuta in nessun iperpiano.